

# MateFIZIKA: Pörgés, forgás, csavarodás – Vektorok és axiálvektorok a fizikában

Tasnádi Tamás\*

2016. április 8.

## Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b>	<b>2</b>
<b>1. Vektorok</b>	<b>2</b>
1.1. Geometriai szemlélettől a vektortér fogalmáig . . . . .	2
1.2. Műveletek vektorokkal . . . . .	5
1.2.1. Skaláris szorzás . . . . .	6
1.2.2. Vektoriális szorzás . . . . .	8
1.2.3. Vegyes szorzás . . . . .	9
1.3. Vektorok „fizikus nyelven” . . . . .	9
1.3.1. Transzformáció forgatáskor . . . . .	10
1.3.2. Transzformáció tükrözéskor . . . . .	11
1.3.3. Poláris- és axiálvektorok . . . . .	12
<b>2. Forgómozgás</b>	<b>13</b>
2.1. Forgás leírása vektorokkal . . . . .	13
2.2. Perdületmegmaradás . . . . .	15
2.3. Perdületváltozás . . . . .	17
2.4. Szabad tengelyek . . . . .	19
<b>Hivatkozások</b>	<b>21</b>

---

\*BME, Matematikai Intézet, Analízis Tanszék

## Bevezetés

Ebben a dolgozatban *vektorokkal* foglalkozunk, és kiemelten tárgyaljuk a vektorok szerepét a forgómozgás leírásában. A háromdimenziós tér sajátossága, hogy az infinitezimális (nagyon kicsiny szögű) forgatásokhoz vektorokat lehet rendelni. Azonban ezek a vektorok (úgynevezett *axiálvektorok*) kicsit különböznek az eltolásokhoz rendelt vektoroktól (*poláris vektorok*), ugyanis a koordináta-rendszer tükrözésekor másképp viselkednek.

## 1. Vektorok

A *vektor* fogalmával több különböző absztrakciós szinten több különböző környezetben lehet találkozni. Ennek megfelelően mi is több „nyelven” fogunk beszélni vektorokról. A legközvetlenebb a *geometriai nyelv*. A vektor egy irányított szakasz a háromdimenziós, fizikai térben, és a vektorokkal néhány egyszerű műveletet lehet végezni. Beszélhetünk *koordinátageometriai nyelven* is vektorokról; ilyenkor egy számhármast, vagy általánosabban, egy szám  $n$ -est tekintünk vektornak. A lineáris algebrában egy matematikus számára minden olyan objektum vektor, amivel bizonyos azonosságokat kielégítő műveleteket lehet végezni. Ez az *absztrakt matematikai nyelv*. Végül a fizikusok számára a vektorok legfontosabb tulajdonsága az, hogy a koordináta-rendszer megváltoztatásakor a komponensek meghatározott transzformációs szabályok szerint változnak meg. Ez a *fizikusi nyelv*.

Ebben a fejezetben e négy különböző nyelv kapcsolatát mutatjuk be.

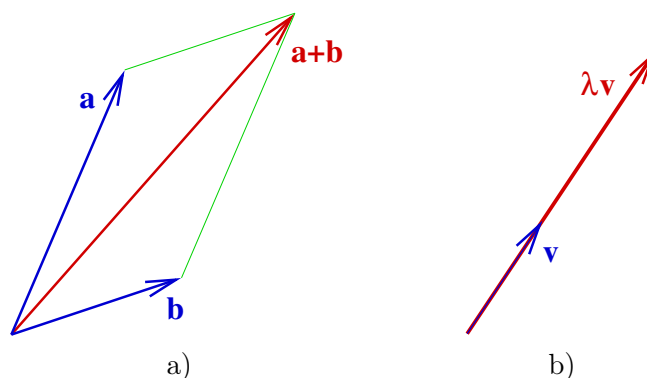
### 1.1. Geometriai szemlélettől a vektortér fogalmáig

Geometriai nyelven a *vektor* egy irányított szakasz, egy nyíl a térben. A vektorok szabadon eltolhatók, különböző kezdőpontból kiinduló vektorokat azonosnak tekintünk, ha egymásba eltolással átvihetők. A vektorok között két egyszerű műveletet definiálunk, az *összeadást*, és a *számmal való szorzást*. Két vektort a jól ismert *paralelogramma-szabály* szerint adunk össze, az 1.a) ábrán látható módon. A vektorok számmal való szorzása pedig egyszerűen a vektor hosszának megnyújtását jelenti, az 1.b) ábrán látható módon.

Számmal való szorzáskor  $-1 < \lambda < 1$  esetén a vektor hossza csökken,  $\lambda < 0$  esetén a vektor iránya ellentétesre változik.

A fenti definíció igen erősen hagyatkozik a geometriai szemléletre, a háromdimenziós euklideszi tér tulajdonságaira, és matematikai szempontból nem kielégítő.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a geometriai nyelven definiált műveletekre



1. ábra. Vektorok összeadása a) és számmal való szorzása b) geometriai nyelven.

teljesülnek a következő szabályok:

$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} :$	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$	kommutativitás	(1a)
$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} :$	$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$	asszociativitás	(1b)
$\exists \mathbf{0}$ , melyre $\forall \mathbf{a} :$	$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$	nullvektor	(1c)
$\forall \mathbf{a}$ esetén $\exists(-\mathbf{a}) :$	$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$	ellentett vektor	(1d)
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} :$	$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$	disztributivitás	(1e)
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a} :$	$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$	disztributivitás	(1f)
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a} :$	$(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$		(1g)
$\forall \mathbf{a} :$	$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$	$1 \in \mathbb{R}$ -el szorzás	(1h)

Absztrakt matematikai nyelven éppen ezekkel a tulajdonságokkal definiáljuk a vektor fogalmát.

**Definíció:** A  $\mathbb{V}$  nem üres halmaz *valós vektortér*, ha adott rajta két művelet,  $\mathbf{a} + : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  *összeadás* és az  $\mathbb{R} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ ,  $(\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda\mathbf{v}$  *számmal való szorzás*, amelyekre teljesülnek az (1) azonosságok. Vektortér elemeit *vektoroknak* nevezzük.

Ez a definíció igen absztrakt, és messze túlmutat a motivációul szolgáló geometriai képen. Könnyen ellenőrizhető, hogy valós vektorteret alkotnak például a valós, egyváltozós polinomok a pontonként definiált műveletekkel, vagy a folytonos valós függvények, szintén a pontonként definiált műveletekkel. (Tehát  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  és  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ .)

Az absztrakt nyelven bevezetünk néhány alapvető fogalmat.

**Definíció:** A vektortéren definiált műveletek segítségével a  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$  számokból és az  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_n \in \mathbb{V}$  vektorokból elkészített

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i\mathbf{v}_i \in \mathbb{V}$$

vektort az  $\mathbf{v}_i$  vektorok  $\lambda_i$  együtthatókkal vett *lineáris kombinációjának* nevezzük.

Például a háromdimenziós térben egy jobbra és egy előre mutató (nem nulla) vektor lineáris kombinációjaként előállítható az összes vízszintes síkban fekvő vektor, de a függőleges vektorok már nem.

**Definíció:** A  $\mathbb{V}$  vektortér egy  $U \subset \mathbb{V}$  részhalmazára azt mondjuk, hogy *generátorrendszer*, ha  $\mathbb{V}$  tetszőleges vektora előállítható (véges sok)  $U$ -beli vektor lineáris kombinációjaként.

Például a háromdimenziós térben egy jobbra és egy előre mutató vektor nem alkot generátorrendszert (hiszen a függőleges vektorok nem állíthatóak elő belőlük), azonban egy jobbra, egy előre és egy felfelé mutató (nem nulla) vektor már generátorrendszert alkot.

Egy generátorrendszer tetszőleges vektorokkal bővítve továbbra is generátorrendszer marad, tehát a generátorrendszerek akármilyen sok elemből állhatnak, azonban nem lehetnek tetszőlegesen kicsinyek.

A generátorrendszer mellett egy másik fontos fogalom a *lineárisan független rendszer*.

**Definíció:** A  $\mathbb{V}$  vektortérben az  $U \subset \mathbb{V}$  halmaz *lineárisan független rendszer*, ha tetszőleges  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$  együtthatók és  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n \subset U$  vektorok választása mellett

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0} \quad \text{esetén} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

A definícióból látszik, hogy egy lineárisan független rendszerből tetszőleges mennyiségű elemet elhagyva továbbra is lineárisan független rendszert kapunk, tehát a lineárisan független rendszerek akármilyen kicsiny elemszámúak lehetnek, azonban nem lehetnek tetszőlegesen nagy számosságúak.

A háromdimenziós térben például bármely három nem nulla, nem egy síkba eső vektor lineárisan független rendszert alkot, de ez a rendszer már nem bővíthető egy negyedik vektorral úgy, hogy lineárisan független maradjon.

A lineáris algebra központi fogalma, a *bázis* az előző két tulajdonság egyesítésével kapható meg.

**Definíció:** A  $\mathbb{V}$  vektortérben a  $B \subset \mathbb{V}$  részhalmaz *bázis*, ha  $B$  lineárisan független generátorrendszer.

A definíciókból azonnal következik, hogy a bázis maximális (nem bővíthető) lineárisan független rendszer, illetve minimális (nem csökkenthető) generátorrendszer. Igazolható, hogy minden vektortérben van bázis, és tetszőleges vektortérben bármely két bázis elemszáma (számossága) azonos. Ez az elemszám (számosság) a vektortér *dimenziója*.

Véges dimenzióban (vagy akár megszámlálhatóan végtelen dimenzió esetén) úgy kaphatunk bázist, hogy egy lineárisan független rendszert addig

bővítünk, amíg csak lehetséges. Érdekes, hogy nagyon nagy vektorterek esetében a bázis létezésének igazolása már korántsem ennyire egyszerű; a bizonyításhoz a halmazelmélet egy mély axiómáját, a kiválasztási axiómát kell használni.

A továbbiakban véges dimenziós vektorterekkel foglalkozunk. (Bár a következő *kifejtési tétel* tetszőleges dimenzióban is igaz.)

**Tétel:** Legyen  $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n\}$  a  $\mathbb{V}$  vektortér egy bázisa. Ekkor tetszőleges  $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$  vektor esetén egyértelműen léteznek olyan  $x_1, x_2 \dots x_n \in \mathbb{R}$  számok, amelyekre

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + \dots + x_n \mathbf{b}_n = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{b}_i \quad (2)$$

teljesül.

A (2) összeget az  $\mathbf{x}$  vektor  $B$  bázisban vett *kifejtésének* nevezzük, ahol az  $x_i$  együtthatók a vektor *koordinátái*, és a kifejtést így is jelöljük:

$$[\mathbf{x}]^B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2 \dots x_n]^T = [x_i] \in \mathbb{R}^n.$$

A  $T$  felső index a *transzponálásra* utal, és sokszor el fogjuk hagyni. A vízszintes írásmódot és a tömör  $[x_i]$  jelölést sorközi képletekben helytakarékosági okból használjuk.

A fenti tételben a (2) kifejtés létezése abból következik, hogy  $B$  generátorrendszer, az egyértelműség pedig abból, hogy  $B$  lineárisan független.

A kifejtési tétel értelmében az  $n$ -dimenziós  $\mathbb{V}$  vektortér elemeit kölcsönösen egyértelmű kapcsolatba hoztuk az  $\mathbb{R}^n$  halmaz elemeivel:

$$\mathbb{V} \ni \mathbf{x} \Leftrightarrow [\mathbf{x}]^B \in \mathbb{R}^n.$$

Ez a megfeleltetés módot ad arra, hogy vektorok helyett *koordinátákban*, azaz a *szám  $n$ -esek nyelvén* gondolkozzunk. Felhívjuk azonban a figyelmet, hogy a  $\mathbb{V} \Leftrightarrow \mathbb{R}^n$  kapcsolat függ a  $B$  bázis megválasztásától!

## 1.2. Műveletek vektorokkal

Ebben a részben többnyire a *koordináták nyelvén* fogunk gondolkozni, és további műveleteket vezetünk be vektorokon.

Állapodjunk meg abban, hogy szám  $n$ -esek összegét és szám szorosát koordinátánként értelmezzük, tehát

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \quad \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}.$$

Könnyen látható, hogy ekkor tetszőleges  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$  vektorokra és  $\lambda \in \mathbb{R}$  számra

$$[\mathbf{x} + \mathbf{y}]^B = [\mathbf{x}]^B + [\mathbf{y}]^B, \quad [\lambda\mathbf{x}]^B = \lambda[\mathbf{x}]^B,$$

ahol  $B$  a vizsgált vektortér egy bázisa. Tehát adott bázisban az eddig megismert két művelet koordinátáinként végezhető.

### 1.2.1. Skaláris szorzás

A háromdimenziós geometriai térben az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok skaláris szorzatát szokás szerint az

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \gamma \quad (3)$$

formula definiálja, ahol  $|\mathbf{a}|$  és  $|\mathbf{b}|$  a vektorok hossza,  $\gamma$  pedig a két vektor szöge. Ezt a képletet használjuk a fizikában például a  $\mathbf{d}$  elmozdulás mellett az  $\mathbf{F}$  erő munkájának kiszámolásakor:  $W = \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}$ .

A (3) definíció matematikai szempontból nem kielégítő, ugyanis nem mondtuk meg pontosan, mit értünk egy vektor *hosszán* és hogyan értelmezzük két vektor *szögét*. A matematikus nyelven más utat követünk.

A (3) definícióból következik, hogy a skaláris szorzás kielégíti a következő azonosságokat:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} : \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad \text{kommutativitás} \quad (4a)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} : \quad (\alpha\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \quad \text{linearitás} \quad (4b)$$

$$\forall \mathbf{a} : \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0 \quad \text{pozitív definit} \quad (4c)$$

$$\forall \mathbf{a} : \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \text{nem elfajuló} \quad (4d)$$

**Definíció:** Az  $\mathbb{E}$  véges dimenziós valós vektortér *euklideszi tér*, ha még adott egy  $\cdot : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  művelet, a *skaláris szorzás*, amely kielégíti a (4) azonosságokat. Ekkor tetszőleges  $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$  vektor *hosszát*, valamint az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektor  $\gamma$  szögét az

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}, \quad \gamma = \arccos \left( \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \right)$$

kifejezések definiálják.

Euklideszi térben a bázis fogalmát szűkíthetjük.

**Definíció:** Az  $\mathbb{E}$  euklideszi térben az  $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{E}$  rendszer *ortonormált bázis*, ha bázis, és  $\forall k, l \in \{1, 2 \dots n\}$  esetén

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = l, \\ 0, & \text{ha } k \neq l. \end{cases}$$

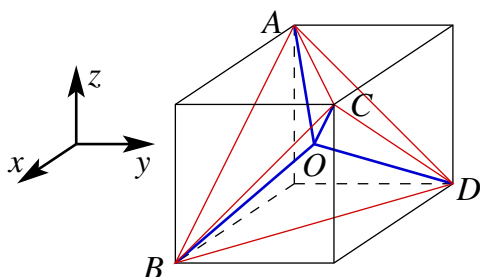
Megmutatható, hogy minden euklideszi térben létezik ortonormált bázis. A háromdimenziós térben három, egymásra páronként merőleges egységvektor ortonormált bázist alkot. Ha  $E$  ortonormált bázis, melyben két tetszőleges vektor koordinátái  $[\mathbf{a}]^E = [a_1, a_2 \dots a_n]^T$ ,  $[\mathbf{b}]^E = [b_k] \in \mathbb{R}^n$ , akkor a skaláris szorzás linearitását felhasználva könnyen igazolható, hogy

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

Ez az alak sokszor felhasználható ismeretlen szög kiszámolására is.

**Feladat:** Határozzuk meg a  $CH_4$  (metán) molekulában a  $H - C - H$  kötési szöget!

**Megoldás:** Ismeretes, hogy a metán molekula tetraéderez szerkezetű, azaz a szénatom egy szabályos tetraéder középpontjában, míg a hidrogénatomok a csúcsokban helyezkednek el. Helyezzük el a szabályos tetraédert a 2. ábrán látható módon egy  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  csúcsú kockában!



2. ábra. A szabályos tetraéder elhelyezése a kockában.

A szénatom az  $O$  pontban van, míg a hidrogénatomok az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  pontokban helyezkednek el. Az ábráról jól látható, hogy

$$\vec{OA} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad \vec{OB} = \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{OC} = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}, \quad \vec{OD} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

így a keresett  $H - C - H$  kötési szög:

$$AOB\angle = \arccos \left( \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} \right) = \arccos \left( \frac{-1 + 1 - 1}{3} \right) = 109,47^\circ.$$

■

### 1.2.2. Vektoriális szorzás

Az  $\mathbb{E}_3$  háromdimenziós euklideszi térben bevezethető egy másik fontos szorzás, a *vektoriális szorzás*, amely a forgómozgás leírásánál, valamint a mágneses kölcsönhatás leírásánál igen jól használható.

**Definíció:** A háromdimenziós euklideszi térben az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok *vektoriális szorzata* a következő tulajdonságokkal egyértelműen meghatározott  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektor:

- $\mathbf{c}$  merőleges  $\mathbf{a}$ -ra és  $\mathbf{b}$ -re;
- $\mathbf{c}$  hossza megegyezik az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok által kifeszített paralelogramma területével, azaz

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \gamma, \quad \text{ahol } \gamma \text{ az } \mathbf{a} \text{ és } \mathbf{b} \text{ közti szög,}$$

- az  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak.

A definíció alapján közvetlenül ellenőrizhető, hogy ha  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathbb{E}_3$  egy jobbsodrású ortonormált bázis, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= \mathbf{0}, & \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Az is megmutatható, hogy a vektoriális szorzás minkét változójában lineáris és antikommutatív, azaz  $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}_3$  és  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  esetén

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

A fenti tulajdonságok felhasználásával belátható, hogy a vektoriális szorzás az  $E = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  ortonormált bázisban vett koordinátákkal a következőképpen írható:

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]^E = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Ahogy három dimenzióban szokás, a koordinátákat számok helyett betűkkel indexeltük. Az utolsó alakban a két vonal a *determinánst* jelöli.

A vektoriális szorzás segítségével könnyen számolhatunk például területet.

**Feladat:** Határozzuk meg az  $A(1, -2, 0)$ ,  $B(2, 4, 3)$  és  $C(4, 0, 5)$  pontok által meghatározott háromszög területét!



**Megoldás:** A háromszög  $T$  területe fele az  $\vec{AB}$  és  $\vec{AC}$  vektorok által kifeszített paralelogramma területének, tehát:

$$T = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{1}{2} \left| \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{bmatrix} 6 \cdot 5 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 - 6 \cdot 3 \end{bmatrix} \right| = \\ = \frac{1}{2} \sqrt{24^2 + 4^2 + (-16)^2} = 2\sqrt{53}.$$

■

### 1.2.3. Vegyes szorzás

A skaláris és vektoriális szorzásból felépíthetünk egy háromváltozós műveletet, amely három vektorhoz rendel egy számot.

**Definíció:** A háromdimenziós euklideszi térben az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok *vegyes szorzata*:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Könnyen igazolható, hogy az  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  vegyes szorzat abszolútértéke megegyezik a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogatával, és a vegyes szorzat pontosan akkor pozitív, ha az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak, pontosan akkor negatív, ha balsodrásút, és pontosan akkor nulla, ha a három vektor egy síkba esik.

A skaláris és vektoriális szorzás tulajdonságainak felhasználásával a következő összefüggések is egyszerűen igazolhatók:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c},$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}).$$

Tehát a tényezők ciklikus permutációja nem változtatja meg a vegyes szorzatot, de két tényező felcserélésével a szorzat előjelet vált.

Megemlítjük még, hogy a vegyes szorzatot a

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

determináns adja meg, ahol a sorokban a vektorok egy ortonormált bázisban vett koordinátái állnak.

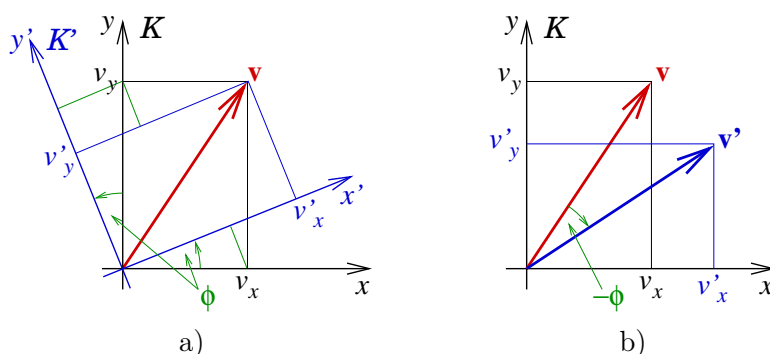
### 1.3. Vektorok „fizikus nyelven”

A fizikusok számára a vektor fogalma sokszor ahhoz kötődik, hogy miként változnak meg a vektor komponensei koordináta-rendszer váltáskor. A mérőberendezések általában egy-egy számot mérnek, ami lehet például egy

vektor adott irányú komponense. Magát a vektort úgy lehet „megmérni”, hogy megmérjük három merőleges irányban a komponenseit. Persze nagyon sokféleképpen kiválaszthatjuk azt a rendszert (ortonormált bázist), amiben megmérjük a komponenseket. Akkor mondhatjuk egy mennyiségre, hogy nem csupán számhármassal, hanem valóban *vektor*, ha a különböző koordináta-rendszerekben (bázisokban) mért komponensek értékei között meghatározott kapcsolat van. Ezt a kapcsolatot vizsgáljuk meg részletesebben a koordináta-rendszer forgatásakor és tükrözésekor.

### 1.3.1. Transzformáció forgatásakor

Tekintsünk a háromdimenziós euklideszi térben egy  $\mathbf{v}$  vektort, melynek komponensei a  $K$  koordináta-rendszerben (ortonormált bázisban):  $[\mathbf{v}]^K = [v_x, v_y, v_z]$ . Legyen a  $K'$  koordináta-rendszer (ortonormált bázis) a  $K$ -nak a  $z$ -tengely körüli  $\phi$  szögű elforgatottja pozitív irányban, és jelölje  $\mathbf{v}$  komponenseit a  $K'$  bázisban a  $[\mathbf{v}]^{K'} = [v'_x, v'_y, v'_z]$  számhármassal.



3. ábra. A  $\mathbf{v}$  vektor komponenseinek transzformációja a) a koordináta-rendszer  $\phi$  szögű elforgatásakor; b) a vektor  $-\phi$  szögű elforgatásakor. (A  $z$ -tengely helyben marad.)

A 3.a ábráról leolvasható a  $\mathbf{v}$  vektor  $K$  és  $K'$ -beli koordinátái közti kapcsolat:

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x \cos \phi + v_y \sin \phi, \\ v'_y &= -v_x \sin \phi + v_y \cos \phi, \\ v'_z &= v_z. \end{aligned}$$

Ugyanakkor az is látható (3.b ábra), hogy az elforgatott koordináta-rendszerben a vektor komponensei megegyeznek az ellenkező irányban elforgatott vektor komponenseivel az eredeti koordináta-rendszerben. Általánosan, ha  $O$  valamilyen (origón átmenő tengely körüli) forgatást jelöl,  $O^{-1}$  pedig ennek inverze, akkor

$$[\mathbf{v}]^{OK} = [O^{-1}\mathbf{v}]^K,$$

és az is egyszerűen látható, hogy a forgatások minden vektorokkal végezhető művelettel felcserélhetőek, azaz tetszőleges  $O$  forgatásra,  $\lambda$  számra és  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  vektorra teljesül, hogy:

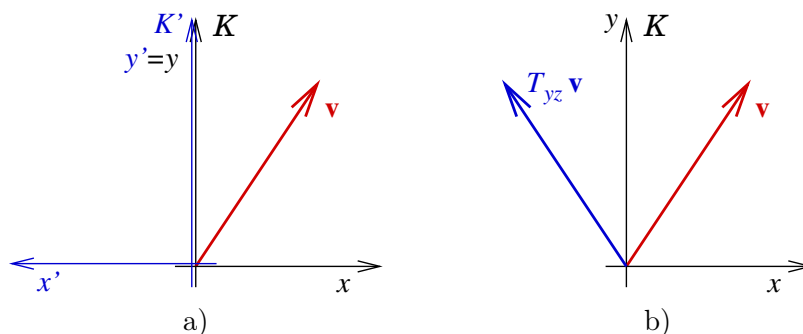
$$\begin{aligned} \lambda O\mathbf{a} &= O(\lambda\mathbf{a}), & O\mathbf{a} + O\mathbf{b} &= O(\mathbf{a} + \mathbf{b}), & O\mathbf{a} \cdot O\mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \\ O\mathbf{a} \times O\mathbf{b} &= O(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), & (O\mathbf{a}, O\mathbf{b}, O\mathbf{c}) &= (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}). \end{aligned}$$

A legutolsó kifejezés egyben azt is jelenti, hogy a forgatások megtartják egy bázis *orientációját* (jobb- vagy balsodrású).

### 1.3.2. Transzformáció tükrözéskor

Most a síkra való tükrözéssel szemben vizsgáljuk meg a vektorok viselkedését. Tetszőleges tükrözésre igaz, hogy kétszer alkalmazva az identitást kapjuk, tehát minden tükrözés inverze önmaga. Ezt röviden úgy mondjuk, hogy a tükrözések *involutív* transzformációk.

Legyen  $T_{yz}$  az  $y$ - $z$  síkra való tükrözés transzformációja. A 4. ábra mutatja a  $K$  koordináta-rendszer illetve a  $\mathbf{v}$  vektor transzformációját a  $T_{yz}$  tükrözéskor.



4. ábra. A  $\mathbf{v}$  vektor komponenseinek transzformációja a) a koordináta-rendszer tükrözésekor; b) a vektor tükrözésekor. (A  $z$ -tengely helyben marad.)

Látható, hogy a  $[\mathbf{v}]^K = [v_x, v_y, v_z]$  és  $[\mathbf{v}]^{K'} = [v'_x, v'_y, v'_z]$  jelölésekkel:

$$v'_x = -v_x, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z.$$

Tetszőleges  $T$  tükrözésre és  $\mathbf{v}$  (úgynevezett *poláris*) vektorra igaz, hogy:

$$[\mathbf{v}]^{TK} = [T^{-1}\mathbf{v}]^K = [T\mathbf{v}]^K. \quad (5)$$

(Később pontosan elmagyarázzuk a „poláris” jelző jelentését.) Az is könnyen látható, hogy

$$\lambda T\mathbf{a} = T(\lambda\mathbf{a}), \quad T\mathbf{a} + T\mathbf{b} = T(\mathbf{a} + \mathbf{b}), \quad T\mathbf{a} \cdot T\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Azonban a vektoriális szorzás és a vegyes szorzás igen furcsán viselkedik a tükrözéssel szemben:

$$T\mathbf{a} \times T\mathbf{b} = -T(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (T\mathbf{a}, T\mathbf{b}, T\mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

tehát megjelenik egy *negatív előjel* is! Ez az előjelváltás abból fakad, hogy három dimenzióban a síkra való tükrözés sodrásváltó transzformáció. A jobb kezünk tükörképe a bal kezünk, ami mozgatásokkal (eltolásokkal, forgatásokkal) nem vihető át a jobb kézbe.

Ez az előjelváltás egyben azt is jelenti, hogy ha  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  „normálisan transzformálódó” vektorok, azaz  $[\mathbf{a}]^{TK} = [T\mathbf{a}]^K$  és  $[\mathbf{b}]^{TK} = [T\mathbf{b}]^K$ , akkor a  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektor „különleges módon transzformálódik”, nevezetesen

$$[\mathbf{c}]^{TK} = -[T\mathbf{c}]^K. \quad (6)$$

### 1.3.3. Poláris- és axiálvektorok

Aszerint, hogy egy vektor hogyan viselkedik a tükrözéssel szemben, megkülönböztetünk *poláris-* és *axiálvektorokat* (*pseudovektorokat*).

**Definíció:** A  $T$  tükrözés során koordinátáikat az (5) összefüggés szerint változtató  $\mathbf{v}$  vektorokat *poláris vektoroknak*, míg a koordinátáikat a (6) összefüggés szerint változtató  $\mathbf{c}$  vektorokat *axiálvektoroknak* nevezzük.

Az axiálvektorokkal végzett vektoriális szorzásra a következő szabályok igazak:

$$\begin{aligned} \text{poláris} \times \text{poláris} &= \text{axiál}, & \text{poláris} \times \text{axiál} &= \text{poláris}, \\ \text{axiál} \times \text{poláris} &= \text{poláris}, & \text{axiál} \times \text{axiál} &= \text{axiál}. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy hasonló módon a skalárokat is két csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a koordináta-rendszer tükrözésekor előjelet váltanak-e vagy nem. Három poláris vektor vegyes szorzata úgynevezett *pseudoskálár*, ami a koordináta-rendszer tükrözésekor előjelet vált.

A fizikában a leggyakrabban a forgómozgással és a mágnességgel kapcsolatos területen találkozunk vektoriális szorzással és axiálvektorokkal.

Például egy  $\boldsymbol{\omega}$  szögsebességgel forgó test  $\mathbf{r}$  pontjának kerületi sebessége:

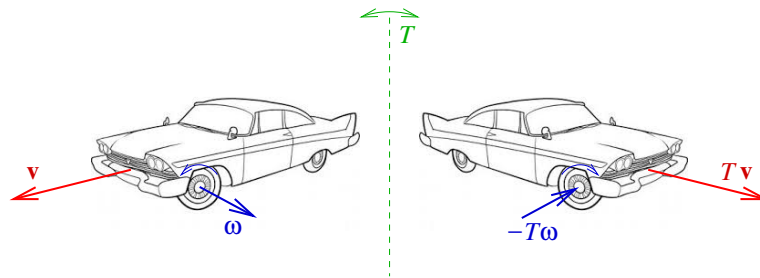
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

ahol  $\mathbf{r}$  és  $\mathbf{v}$  poláris vektor, míg  $\boldsymbol{\omega}$  axiálvektor. (A szögsebességvektor jelentését részletesebben is tárgyaljuk a következő fejezetben.) Ezt jól illusztrálja az 5. ábra.

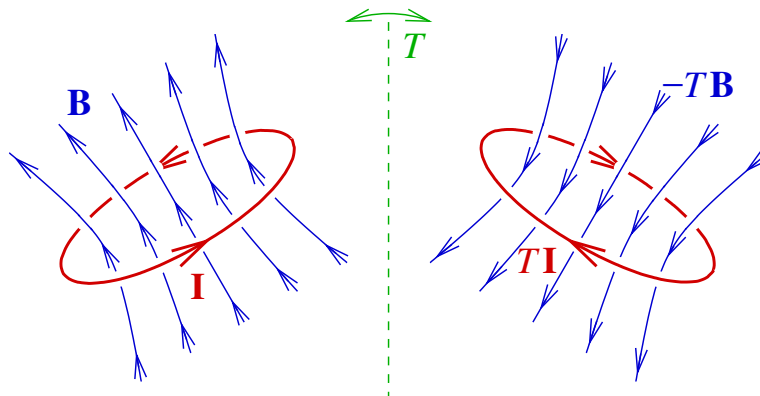
A  $\mathbf{B}$  indukciójú mágneses térben  $\mathbf{v}$  sebességgel haladó  $Q$  törlésre ható erő:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

ahol  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{v}$  poláris vektor, és ezért  $\mathbf{B}$  axiálvektor. Ezt figyelhetjük meg a 6. ábrán.



5. ábra. Az autó  $\mathbf{v}$  sebességvektora poláris vektor, míg a forgó kerék  $\boldsymbol{\omega}$  szögsebességvektora axiálvektor.



6. ábra. Az  $I$  köráram által keltett  $\mathbf{B}$  mágneses indukció axiálvektor.

## 2. Forgómozgás

Ha rögzített tengely körüli forgásokat vizsgálunk, a forgómozgást leíró mennyiségek (forgatónyomaték, szögelfordulás, szögsebesség, impulzusmomentum) vektoriális jellege „elsikkad”, mert ezek a vektorok általában (de nem mindig!) egy rögzített irányba, a tengely irányába mutatnak, ezért elég csak a nagysággal számolni. Ebben a fejezetben kísérletekkel és számolási feladatokkal illusztráljuk ezen mennyiségek vektor jellegét.

Az előző fejezetben a vektorokat vastag szedéssel, hosszukat (nagyságukat)  $|\cdot|$  abszolútérték-jellel jelöltük. Mostantól egy  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{r}$  vektor nagyságát egyszerűen  $v$ -vel,  $r$ -el jelöljük, tehát  $v = |\mathbf{v}|$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ , stb.

### 2.1. Forgás leírása vektorokkal

Általában egy euklideszi térben azokat a transzformációkat nevezzük *forgatásoknak*, amelyek az origót helyben hagyják, a távolságokat (és így a szögeket is) megőrzik, és az orientációt (azaz egy ortonormált bázis sodrását) sem

változtatják meg. Belátható (de szemlélet alapján is nyilvánvaló), hogy a háromdimenziós euklideszi térben minden forgatás egy origón átmenő egyenest, a forgatás *tengelyét* pontonként helyben hagyja, a tengelyre merőleges síkokat önmagukba viszi, és minden ilyen síkban a forgatás ugyanazzal a szöggel jellemezhető. Tehát egy forgatást két adattal adhatunk meg; a forgástengely állásával és a forgatás szögével. Ezt a két adatot könnyen egyesíthetjük egy vektorrá.

**Definíció:** Az  $\alpha$  *szögelfordulás-vektor* azt a forgatást írja le a háromdimenziós euklideszi térben, amelynek tengelye az origón átmenő,  $\alpha$ -val párhuzamos egyenes, forgásszöge pedig  $\alpha = |\alpha|$ . Az  $\alpha$  vektor végpontja felől nézve a forgássíkra a forgatás iránya pozitív (az óramutató járásával ellentétes) irányú.

Érdekes, hogy szögelfordulás esetén a vektorok összeadásának nincs közvetlen geometriai jelentése. Általában egymás után végzett forgatások nem cserélhetők fel egymással. Azonban (infinitezimálisan) kis szögű forgatások már felcserélhetők egymással, és ilyenkor két forgatás (tetszőleges sorrendben vett) kompozícióját a szögelfordulás-vektorok összege írja le.

A szögelfordulás-vektornál fontosabb számunkra a *szögsebességvektor*.

**Definíció:** Az  $\omega$  *szögsebességvektor* egy merev test  $\alpha$  szögelfordulás-vektorának változási sebessége, azaz

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} \approx \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}.$$

Az  $\omega$  vektor a pillanatnyi forgástengellyel párhuzamos, és nagysága megadja a test időegységre jutó elfordulási szögét. Rögzített tengely körüli forgás esetén mind a szögelfordulás, mind a szögsebesség párhuzamos a tengellyel.

Az origó körül  $\omega$  szögsebességgel forgó merev test  $\mathbf{r}$  pontjának  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  *kerületi sebessége* könnyen kifejezhető a vektoriális szorzás segítségével:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \omega \times \mathbf{r}. \quad (7)$$

Mint ahogy  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{r}$  poláris vektor, a képletből az is látszik, hogy a szögsebesség (és így a szögelfordulás is) axiálvektor.

A *perdület* vagy *impulzusmomentum* az impulzussal (lendülettel) analóg mennyiség a forgómozgásban.

**Definíció:** Az  $\mathbf{r}$  helyen  $\mathbf{v}$  sebességgel haladó  $m$  tömegű tömegpont  $\mathbf{N}$  *perdülete* vagy *impulzusmomentuma* az origóra vonatkoztatva:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}).$$

Összetett rendszer impulzusmomentuma az alkotóelemek impulzusmomentumának összege. Így a (7) egyenlet felhasználásával, egy  $\omega$  szögsebességgel forgó  $\{m_i\}$  tömegpontrendszer impulzusmomentuma:

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i \times (m_i \omega \times \mathbf{r}_i). \quad (8)$$

Tekintsünk egy origón áthaladó  $t$  tengely körül  $\omega$  szögsebességgel forgó pontrendszert (merev testet), és jelölje  $\rho_i$  az  $i$ -edik tömegpont távolságát a  $t$  tengelytől. A fenti (8) összefüggésből adódik, hogy forgó rendszer (merev test) impulzuszórántumának  $N_t$  tengely irányú komponense:

$$N_t = \Theta_t \omega, \quad \text{ahol} \quad \Theta_t = \sum_i m_i \rho_i^2$$

a test (vagy pontrendszer)  $t$  tengelyre vonatkoztatott *tehetetlenségi nyomatéka*. Ezt az összeget különböző alakú testekre ki lehet számolni, illetve táblázatból ki lehet keresni.

Ha a forgó test tömegeloszlása tükörszimmetrikus a  $t$  tengelyre vagy egy  $t$ -re merőleges síkra, akkor az  $\mathbf{N}$  impulzuszórántum vektora tengely irányú, így a vektoriális mennyiségekre is érvényes az  $\mathbf{N} = \Theta_t \boldsymbol{\omega}$  összefüggés. Azonban fontos, hogy általában  $\mathbf{N}$  és  $\boldsymbol{\omega}$  *nem párhuzamosak*; erre konkrét példát is mutatunk később, a 20. oldalon levő feladatban.

Egy másik igen fontos mennyiség a *forogatónyomaték*, amely szintén a vektoriális szorzás segítségével definiálható.

**Definíció:** Az  $\mathbf{r}$  helyvektorral jellemzett pontban támadó  $\mathbf{F}$  erő  $\mathbf{M}$  *forogatónyomatéka* az origóra vonatkoztatva:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (9)$$

A forogatónyomaték tehát axiálvektor. Jelölje  $\alpha$  az  $\mathbf{F}$  erő és az  $\mathbf{r}$  vektor szögét! Látható, hogy a forogatónyomaték nagysága a jól ismert  $M = kF$  kifejezés, ahol  $k = r \sin \alpha$  az *erőkar* (az erő hatásvonalának az origótól mért távolsága), a forogatónyomaték iránya pedig merőleges a forogás síkjára.

Newton második törvényéből levezethető a *forogómozgás alapegyenlete*, amely szerint egy rendszerre (pontrendszerre vagy merev testre) ható külső forogatónyomatékok  $\mathbf{M}$  eredője megegyezik a rendszer  $\mathbf{N}$  impulzuszórántumának változási sebességével:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{N}}{dt}. \quad (10)$$

Ha egy merev test forgása egy rögzített  $t$  szimmetriatengely körül történik, akkor  $\boldsymbol{\omega}$  mellett  $\mathbf{N}$  és  $\mathbf{M}$  is tengely irányú, és a (10) egyenlet a korábbi képletek felhasználásával jól ismert  $M = \Theta_t \frac{d\omega}{dt}$  egyenlőségre egyszerűsödik. Azonban általában  $\mathbf{M}$  és  $\mathbf{N}$  *nem azonos irányúak*; erre is később látunk példát.

## 2.2. Perdületmegmaradás

A forogómozgás alapegyenletének speciális eseteként megkapható a *perdületmegmaradás törvénye*: ha egy testre vagy pontrendszerre nem hat külső

forгатónyomaték, akkor a rendszer impulzusmomentuma nem változik. A megmaradási tétel komponensenként is érvényes; ha például a rendszerre ható külső forгатónyomaték  $z$  komponense nulla, akkor a perdület  $z$  komponense megmarad. Ezt illusztrálják a következő forgózsámolyos kísérletek.

A kísérletek az <http://fizipedia.bme.hu> honlapon videofelvételen is megtekinthetők, *Härtlein Károly* bemutatásában.

**Kísérlet:** „Forgózsámolyon ülő személyt kinyújtott lábbal és kiterjesztett karral, kezében súlyzóval hozzunk forgásba. A személy függőleges tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékának változtatásával, kezének, lábának behúzásával változtathatja szögsebességét.” [1]

**Magyarázat:** A rendszerre nem hat külső forгатónyomaték, így a függőleges irányú,  $N = \Theta\omega$  nagyságú impulzusmomentum megmarad. A Forgózsámolyon ülő személy a súlyok és lábai behúzásával  $\Theta$  tehetetlenségi nyomatékát csökkenti, ezért forgásának  $\omega$  szögsebessége megnő. A lábak és a súlyok kiterjesztésével  $\Theta$  nő,  $\omega$  csökken.

**Kísérlet:** „A nyugvó forgózsámolyon ülő kísérletező nyugvó biciklikereket tart, amelyet tengelyénél fogva átfordít. Ennek semmi hatása sincs. Forgassuk meg a kereket, és most így végezzük el az előbbi kísérletet. Mihelyt a kezdeti vízszintes helyzetből kimozdul a kerék tengelye, forgásba jön a zsámoly. Figyeljük meg, hogy ha ellentétes irányba fordítjuk a biciklikerek tengelyét, a zsámoly is ellenkező irányban kezd el forogni. Végül ha az eredeti, vízszintes állapotba fordítjuk a tengelyt, a zsámoly nyugalomba kerül.” [2]

**Magyarázat:** A rendszer perdületének függőleges komponense megmarad. A forgó kerék perdülete kezdetben vízszintes irányú, de a forgó kerék tengelyének elforgatásával a perdület vektorát is függőlegesre állítjuk. Ezt a függőleges perdületet kompenzálja a zsámoly ellentétes irányú forgása.

**Kísérlet:** „Nyugvó forgózsámolyon ülő kísérletező mozdulatlan biciklikereket tart a kezében. Forgásba hozható a zsámoly oly módon, hogy a biciklikereket függőlegesen tartott tengellyel forgásba hozzuk. Figyeljük meg, hogy a kerék forgásiránya határozza meg a zsámoly forgásirányát, amely éppen ellentétes lesz a biciklikerek forgási irányával.” [3]

**Magyarázat:** A rendszer perdületének függőleges komponense kezdetben és mindvégig zérus. A forgó kerék impulzusmomentumát kompenzálja az ellentétes irányban forgó zsámoly.

**Kísérlet:** „A zsámolyon ülő kísérletezőnek adjunk egy függőleges tengelyű forgó kereket, ezzel perdületet adunk a rendszernek. Külső forгатónyomaték nélkül ez megmarad. Ha a kerék forgását a zsámolyon ülő személy lefékezi, a forgózsámoly forgásba jön.” [4]



**Magyarázat:** Ez a jelenség is a függőleges irányú perdület megmaradásával magyarázható.

### 2.3. Perdületváltozás

Most olyan rendszereket vizsgálunk, amelyekre külső forgatónyomaték hat, és ezért perdületük megváltozik. Emlékezzünk, hogy a forgómozgás alap-egyenlete

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{N}}{dt}, \quad (11)$$

ahol  $\mathbf{M}$  a rendszerre ható külső (eredő) forgatónyomaték,  $\mathbf{N}$  pedig a rendszer perdülete.

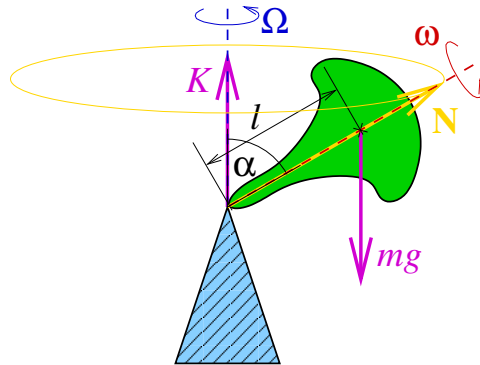
**Kísérlet:** „Ha a nem forgó biciklikereket a tengelyének végénél fogva felfüggesztjük, akkor a lengések lecsillapodása utáni helyzetben nincs mit csodálkozni. Ismételjük meg a kísérletet forgó biciklikerekkel! Ekkor meglepő látványban lesz részünk, a biciklikerek precesszálni kezd a függőleges tengely körül. A biciklikerek perdületvektorára merőleges forgatónyomaték csak a perdület irányát változtatja meg – ez eredményezi a precessziós forgást. Forgassuk meg a biciklikereket ellenkező irányba, a precesszió iránya is ellenkezőre vált.” [5]

**Magyarázat:** A jelenség megértéséhez alapvető fontosságú, hogy a perdületet valamint a forgatónyomatékot *vektorként* kezeljük! A forgó biciklikerek perdülete tengely irányú. Az aszimmetrikus felfüggesztés miatt a kerékre ható forgatónyomaték vízszintes síkban fekszik, és iránya merőleges a biciklikerek forgástengelyére. A forgómozgás (11) alapegyenlete értelmében kis idő alatt a perdület vektor a forgatónyomaték irányába változik, ami azt jelenti, hogy a forgó kerék tengelye *vízszintes síkban* elfordul. Persze, ekkor a forgatónyomaték is kicsit más irányú lesz; újra a vízszintes síkban merőleges a kerék tengelyére.

A jelenség hasonló ahhoz, hogy a fáról kezdősebesség nélkül leeső alma függőleges pályán mozog, míg a nagy kezdősebességgel rendelkező Hold körpályán haladva gyorsul folyamatosan a Föld felé. A sebességnek az impulzuszórási momentum, a Föld gravitációs vonzóerejének pedig a forgatónyomaték felel meg.

Az előző kísérletben megfigyelt precesszió szögsebességét – bizonyos elhanyagolások mellett – könnyen ki is számolhatjuk!

**Feladat:** Határozzuk meg az  $\omega$  szögsebességgel gyorsan forgó szimmetrikus pörgettyű precessziójának  $\Omega$  szögsebességét! A pörgettyű tömege  $m$ , szimmetriatengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka  $\Theta$ , a tömegközéppont és az alátámasztási pont távolsága  $l$ , a szimmetriatengely a függőlegessel  $\alpha$  szöget zár be (7. ábra).



7. ábra. A gyorsan forgó, precesszáló szimmetrikus pörgettyű.

**Megoldás:** A gyorsan forgó, szimmetrikus pörgettyű  $\mathbf{N} = \Theta\boldsymbol{\omega}$  perdülete mindenkor a pörgettyű tengelyének irányába mutat, és egy  $\alpha$  félnyílásszögű kúp mentén  $\Omega$  szögsebességgel forog. A perdületváltozás nagysága megegyezik a forgó  $\mathbf{N}$  vektor végpontjának sebességével:

$$\left| \frac{d\mathbf{N}}{dt} \right| = \Omega\Theta\omega \sin \alpha.$$

Másrészt, a pörgettyűre ható forgatónyomaték:  $M = mgl \sin \alpha$ . A két kifejezés egyenlőségéből a precesszió szögsebességére

$$\Omega = \frac{mgl}{\Theta\omega}$$

adódik.

A megoldás során feltételeztük, hogy  $\alpha$  állandó, valamint  $\omega \gg \Omega$ , ezért a precesszióból adódó impulzusmomentum elhanyagolható. ■

Az előzőekből látható, hogy gyorsan forgó, jelentős perdülettel rendelkező kerék tengelyének elforgatásához nem az álló kerék esetén megszokott forgatónyomatékot kell kifejtenünk a kerékre, hanem meglepő módon arra merőlegeset. Ezt illusztrálja a következő kísérlet, amit legjobb, ha magunk is elvégezzünk, hiszen csak így érezhetjük a kerékre kifejtett forgatónyomatékot.

**Kísérlet:** „Egy nyugvó biciklikerek tengelye nagyon könnyen átfordítható, a mindennapi tapasztalatunknak megfelelően. A forgó biciklikerek átfordításához sokkal nagyobb, és más irányú nyomatékra van szükség. A kezünkkel a kerék perdületének irányát kell változtatnunk, az ehhez szükséges nyomaték merőleges a tengelyre és függőleges síkú. Tehát az egyik kezünkkel magunk felé kell húznunk, míg a másikkal el kell tolnunk a tengely végeit.” [6]

A pörgettyűmozgással, precesszióval kapcsolatos még a következő kísérlet.

**Kísérlet:** „A kísérletünk főszereplője egy pörgettyű. Vizsgáljuk meg hogyan viselkedik forgás nélkül, mint fizikai inga. Az alátámasztási pont és a tömegközéppont távolsága könnyen állítható. Először helyezkedjen el a tömegközéppont az alátámasztási pont alatt. Jegyezzük meg ennél a távolságnál az inga periódusidejét! Csökkentve a távolságot növekszik a periódusidő. Csökkentjük még tovább a távolságot, a periódusidő tovább növekszik! Ezután állítsuk be az eszközünket úgy, hogy a tömegközéppont magasabban legyen mint az alátámasztási pont, ekkor az eszköz ledőlne a tartójáról, instabillá vált. Keressük meg azt a helyzetet amikor egybeesik az alátámasztási és a tömegközéppont! Most közömbös helyzetű az eszközünk. Ismételjük meg kísérleteinket, de most forgó pörgettyűvel! Az eszközünk lengések helyett precesszáló mozgást végez. Most ennek a szögsebességét jegyezzük meg. Emelve a tömegközéppontot, azt tapasztaljuk, hogy lassul a precesszió szögsebessége. Figyeljük meg, hogy mindkét esetben a tengely vége, felülről figyelve az óramutató járásával ellentétes mozgást végez. Emeljük tovább a tömegközéppontot, tovább lassul a precesszió szögsebessége. Emeljük a tömegközéppontot úgy, hogy legyen instabil az eszközünk! Ekkor nem dől le, hanem ellentétes irányú precesszióval válaszol. Végül keressük meg a közömbös helyzetet. Ekkor az erőmentes pörgettyűnk tengelye tetszőleges helyzetbe állítva nyugalomban marad. Ezt a beállítást nem is olyan egyszerű elérni!” [7]

## 2.4. Szabad tengelyek

Érdekes jelenség, hogy aszimmetrikus testek bizonyos tengelyek körül „jobban szeretnek forogni”, mint más tengelyek körül. Ez pontosan azt jelenti, hogy akármilyen szabálytalan tömegeloszlású test esetében is mindig választható három egymásra páronként merőleges, úgynevezett *szabad tengely*, amely körül szabadon (tehát külső forgatónyomaték nélkül) foroghat a test. Legyen e három tengelyhez tartozó három tehetetlenségi nyomaték nagyságrendben  $\Theta_x \leq \Theta_y \leq \Theta_z$ ! Megmutatható, hogy ekkor az  $y$  tengely körül a szabad forgás, bár lehetséges, *instabil*, míg a másik két tengely körüli forgás *stabil*, valamint a forgás a „legstabilabb” a legnagyobb tehetetlenségi nyomatékhoz tartozó  $z$  tengely körül. Ezt a jelenséget mutatja be a súlytalanság állapotában készített [10] videó.

Földi körülmények között a következő kísérletek alkalmasak a jelenség demonstrálására.

**Kísérlet:** „Egy egyik végén felfüggesztett hosszúkás fahasábot forgassunk meg a hozzá kapcsolt vastag fémhuzal segítségével. Kezdetben a hosszabbik oldalával párhuzamos tengely körül fog forgást végezni. Jelentősen megnövelve a fordulatszámot, megváltoztatja a fahasáb a forgási tengelyét és a maximális tehetetlenségi nyomatékot adó tengely körül fog forogni.” [8]

**Magyarázat:** Magas fordulatszámnál a forgás könnyebben „átbillen” a leg-

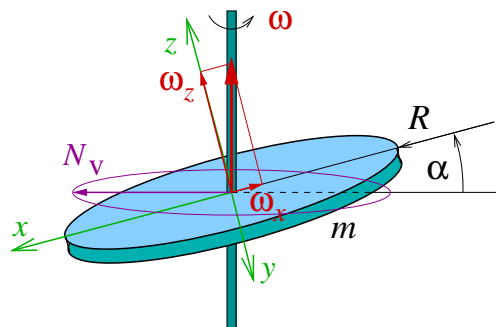
stabilabb szabad tengely körüli forgásba, amelyhez a legnagyobb tehetetlenségi nyomaték tartozik.

**Kísérlet:** „A kísérletünk főszereplője egy biciklilánc, amelyet könnyedén meg tudunk forgatni a hozzá kapcsolt vastag fémhuzal segítségével. Megpörgetve a láncot a láncszemek egyre nagyobb sugarú pályára kerülnek. A fordulatszám növelésével a lánc megemelkedik és kifeszül, szabályos köralakot formálva a forgástengelyre merőleges síkban.” [9]

**Magyarázat:** A biciklilánc nem merev test, így ez a kísérlet nem pontosan ugyanazt a jelenséget demonstrálja, mint az előző kísérlet. Azonban itt is megfigyelhető, hogy magas fordulatszámnál a lánc olyan helyzetben forog stabilan, amelyben a legnagyobb a tehetetlenségi nyomatéka.

Meglepő, hogy egy szabálytalan alakú test a három szabad tengely kivételével nem képes más tengely körül szabad, szabályos forgást végezni. Másként fogalmazva, egy nem szabad tengely körüli állandó forgás fenntartásához folyamatosan (változó irányú) forgatónyomatékokat kell kifejteni a tengelyen keresztül a forgó testre. Ezért nagyon fontos, hogy nagy sebességgel forgó alkatrészek pontosan a szimmetriatengelyük (egyik szabad tengelyük) mentén legyenek tengelyezve. A következő feladatban azt számoljuk ki, hogy egy ferdén tengelyezett forgó tárcsa mekkora úgynevezett *deviációs nyomatékokat* fejt ki a tengelyre.

**Feladat:** Mekkora forgatónyomatékkal terheli az  $\omega$  szögsebességgel forgó függőleges tengelyt a 8. ábrán látható, ferdén felszerelt tömör, homogén,  $m$  tömegű,  $R$  sugarú tárcsa? Jelölje a tárcsa síkjának a vízszintessel bezárt szögét  $\alpha$ !



8. ábra. A forgó tengelyre ferdén felszerelt tárcsa.

**Megoldás:** A feladat megoldásához azt kell tudni, hogy nem szabad tengely körüli forgás esetén a következő módon lehet meghatározni az  $\omega$  szögsebességből az  $\mathbf{N}$  perdületvektort. A szögsebességet először felbontjuk a három

szabad tengely irányába mutató komponensre:  $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$ . Ezután minden komponenset megszorozunk az adott szabad tengely körüli tehetetlenségi nyomatékkal, végül a kapott vektorokat összeadjuk, tehát:

$$\mathbf{N} = \Theta_x \omega_x \mathbf{i} + \Theta_y \omega_y \mathbf{j} + \Theta_z \omega_z \mathbf{k}.$$

Esetünkben a tárcsa egyik szabad tengelye, jelöljük ezt  $z$ -vel, a tárcsa síkjára merőleges, és így  $\omega_z = \omega \cos \alpha$ ,  $\Theta_z = \frac{1}{2} m R^2$ . A másik két szabad tengelyt helyezük el úgy a tárcsa síkjában, hogy  $\omega_y = 0$  teljesüljön, ahogy a 8. ábrán látható. Ekkor  $\omega_x = -\omega \sin \alpha$  és  $\Theta_x = \Theta_y = \frac{1}{4} m R^2$ .

Látható, hogy a perdület függőleges irányú komponense nem változik, azonban a vízszintes irányú  $N_v$  komponens a testtel együtt  $\omega$  szögsebességgel forog, és nagysága:

$$N_v = \Theta_x \omega_x \cos \alpha + \Theta_z \omega_z \sin \alpha = \frac{m R^2 \omega}{8} \sin(2\alpha).$$

Így a tengelyt terhelő forgatónyomaték nagysága:

$$M = \left| \frac{d\mathbf{N}}{dt} \right| = N_v \omega = \frac{m R^2 \omega^2}{8} \sin(2\alpha).$$

Látható, hogy  $\alpha = 0^\circ$  és  $\alpha = 90^\circ$  esetén a tárcsa nem terheli a tengelyt. ■

## Hivatkozások

- [1] Härtlein Károly: Perdületmegmaradás I. BME Fizipedia videó. URL [http://fizipedia.bme.hu/index.php/Perdület\\_megmaradás\\_I..](http://fizipedia.bme.hu/index.php/Perdület_megmaradás_I..)
- [2] Härtlein Károly: Perdületmegmaradás II. BME Fizipedia videó. URL [http://fizipedia.bme.hu/index.php/Perdület\\_megmaradás\\_II..](http://fizipedia.bme.hu/index.php/Perdület_megmaradás_II..)
- [3] Härtlein Károly: Perdületmegmaradás III. BME Fizipedia videó. URL [http://fizipedia.bme.hu/index.php/Perdület\\_megmaradás\\_III..](http://fizipedia.bme.hu/index.php/Perdület_megmaradás_III..)
- [4] Härtlein Károly: Perdületmegmaradás IV. BME Fizipedia videó. URL [http://fizipedia.bme.hu/index.php/Perdület\\_megmaradás\\_IV..](http://fizipedia.bme.hu/index.php/Perdület_megmaradás_IV..)
- [5] Härtlein Károly: Perdületmegmaradás V. BME Fizipedia videó. URL [http://fizipedia.bme.hu/index.php/Perdület\\_megmaradás\\_V..](http://fizipedia.bme.hu/index.php/Perdület_megmaradás_V..)
- [6] Härtlein Károly: Perdületmegmaradás VI. BME Fizipedia videó. URL [http://fizipedia.bme.hu/index.php/Perdület\\_megmaradás\\_VI..](http://fizipedia.bme.hu/index.php/Perdület_megmaradás_VI..)
- [7] Härtlein Károly: Pörgettyű vizsgálatok. BME Fizipedia videó. URL [http://fizipedia.bme.hu/index.php/Pörgettyű\\_vizsgálatok](http://fizipedia.bme.hu/index.php/Pörgettyű_vizsgálatok).

- [8] Härtlein Károly: Szabad tengely vizsgálata I. BME Fizipedia videó.  
URL [http://fizipedia.bme.hu/index.php/Szabad\\_tengely\\_I..](http://fizipedia.bme.hu/index.php/Szabad_tengely_I..)
- [9] Härtlein Károly: Szabad tengely vizsgálata II. BME Fizipedia videó.  
URL [http://fizipedia.bme.hu/index.php/Szabad\\_tengely\\_II..](http://fizipedia.bme.hu/index.php/Szabad_tengely_II..)
- [10] Rotating solid bodies in microgravity. Youtube videó.  
URL <https://www.youtube.com/watch?v=BPMjcN-sBJ4>.