

# MateFizika - Statika

Werner Miklós Antal

2016. április 2.

## Tartalomjegyzék

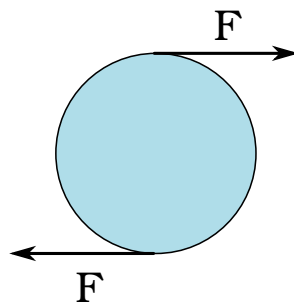
<b>1. Merev testek egyensúlya</b>	<b>2</b>
<b>2. Feladatok</b>	<b>3</b>
2.1. Kéttámaszú tartó . . . . .	3
2.2. Nem a végein alátámasztott kéttámaszú tartó . . . . .	4
2.3. Lejtőn álló hasáb . . . . .	4
2.4. Három rönkből álló farakás egyensúlya . . . . .	5
<b>3. Statikailag túlhatározott rendszerek</b>	<b>7</b>
3.1. Falhoz támasztott létra egyensúlya . . . . .	7
3.2. Háromtámaszú tartó . . . . .	8
3.3. Háromtámaszú tartó, csuklóval . . . . .	10
3.4. Gerber tartó, Szabadság-híd . . . . .	11
3.5. Magas farakás . . . . .	12
<b>4. Vízbe mártott testek, a felhajtóerő</b>	<b>13</b>
4.1. Vízbe nyomott pálca, stabilitás . . . . .	14
4.2. Úszás stabilitása . . . . .	15
4.3. Úszó deszka, stabilitás . . . . .	15

# 1. Merev testek egyensúlya

A minket körülvevő világban nagyon sok olyan kiterjedt szilárd testtel találkozunk, melyek alakja a külső körülményektől függetlenül gyakorlatilag változatlan marad. Ezt matematikailag úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a test két tetszőleges pontjának a távolsága állandó marad. Szigorúan véve ilyen test nincs, még a legkeményebb anyagok mint pl. a gyémánt is deformálódnak külső erők hatására, ezek a deformációk azonban sokszor elegendően kicsik ahhoz, hogy eltekinthessünk tőlük. Műszaki szempontból az, hogy mikor „elegendően kicsi” a deformáció attól is függ, hogy milyen feladatot szeretnénk megoldani: egy híd elemei „merev testnek” tekinthetők pedig a közlekedés miatt igen nagy, centiméteres deformációk, is kialakulhatnak rajtuk. Egy elektronmikroszkóp vagy holográfia laborban azonban már a műszerek alátámasztásának néhány mikrométeres torzulása is problémás lehet.

Ezen az alkalmon ideálisnak tekintett merev testek statikájával fogunk foglalkozni, azaz arra a kérdésre keressük a választ, hogy egy test, vagy néhány test együttes rendszere milyen feltételek mellett lehet egyensúlyban. Az egyensúly egyik feltétele, hogy a testre ható külső erővektorok összege (amit a külső erők eredőjének is nevezünk) nulla legyen:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}. \quad (1)$$



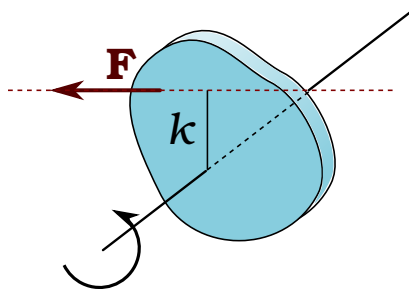
1. ábra

Egy kiterjedt test esetén ez azonban nem elégséges feltétele az egyensúlynak, hiszen ahogy az 1. ábrán is látszik bár a kerékre ható erők vektori összege nulla, mégis tudjuk, a kerék el fog fordulni, azaz nincs egyensúlyban. Merev testek esetén az egyensúly másik feltétele, hogy a testre ható forgatónyomatékok összege is nulla kell legyen.

Egy forgástengelyre vonatkoztatott forgatónyomatékot a következő módon kell kiszámítani (lásd 2. ábra):

- Fel kell venni egy „pozitív”-nak tekintett forgásirányt. Egy erő forgatónyomatéka pozitív, ha ebbe az irányba forgatná a testet, negatív, ha ezzel ellentétesen.
- Meg kell határozni a külső erő hatásvonalának a forgástengelytől mért  $k$  távolságát, ezt a külső erő erőkarjának nevezzük.
- A külső erő forgástengelyre merőleges komponensét megszorozva az erőkarral kapjuk az erő tengelyre vonatkoztatott forgatónyomatékát.

Egy test egyensúlyának feltétele tehát az is, hogy a külső erők forgatónyomatékai tetszőleges forgástengelyre tűnjenek el.



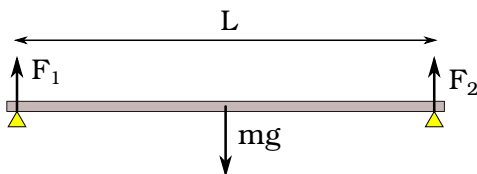
2. ábra

Mivel a megoldandó feladatok jelentős részében a Föld gravitációs vonzását is figyelembe kell vennünk, fontos megjegyezni, hogy a test minden pontjára ható homogén gravitációs erőtér forgatónyomaték szempontjából úgy kezelhető mintha a testre ható eredő gravitációs erő a test tömegközéppontjában hatna.

## 2. Feladatok

### 2.1. Kéttámaszú tartó

Tekintsünk egy a két végén alátámasztott  $m$  tömegű pallót. A palló hossza legyen  $L$ . A kérdésünk először csupán annyi, hogy mekkora tartóerők ébrednek a két alátámasztási pontnál. Jelölje az egyik erőt  $F_1$  a másikat  $F_2$ . A pallóra hat továbbá a gravitációs erő, melynek eredő nagysága  $mg$ , és nyomaték szempontjából a palló tömegközéppontjában ható erővel helyettesíthető.



Az egyensúly feltétele egyrészt az erők eredőjének eltűnése,

$$F_1 + F_2 - mg = 0 . \tag{2}$$

A másik feltétel az eredő forgatónyomaték eltűnése. Ehhez ki kell választani egy tengelyt, legyen ez pl. a baloldali alátámasztás. Ekkor a baloldali alátámasztásnál ható erő nyomatéka nulla, a másik két erő nyomatékának kell kiejténie egymást,

$$F_2 L - mg \frac{L}{2} = 0 . \tag{3}$$

A két egyenletet megoldva azt találjuk, hogy

$$F_1 = \frac{mg}{2} , \quad F_2 = \frac{mg}{2} . \tag{4}$$

Fontos megjegyezni, hogy a nyomatéki egyenlet felírásánál szabadon választhattuk meg a forgástengelyt. Választhattunk volna másképp is. Ha pl. a jobboldali alátámasztási pontra

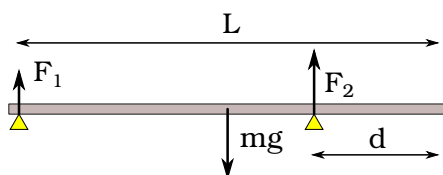
írjuk fel a nyomatéki egyenletet, úgy az az alábbi alakú,

$$-F_1 L + mg \frac{L}{2} = 0 . \quad (5)$$

Láthatóan az egyenlet más alakú, mint az előzőleg használt nyomatéki egyenlet, azonban az egyenletek megoldásai nem változtak.

## 2.2. Nem a végein alátámasztott kéttámaszú tartó

Tekintsük az előző feladatot, de a jobboldali alátámasztás ne a palló végénél, hanem attól  $d$  távolságra legyen!



Az erők eredőjének eltűnése az előző feladathoz hasonlóan az alábbi egyenletet szolgáltatja nekünk,

$$F_1 + F_2 - mg = 0 . \quad (6)$$

A forgatónyomaték eltűnését írjuk fel ismét a baloldali alátámasztási pontra!

$$F_2 (L - d) - mg \frac{L}{2} = 0 . \quad (7)$$

Ez utóbbi egyenletből

$$F_2 = mg \frac{L}{2(L - d)} , \quad (8)$$

behelyettesítve az első egyenletbe,

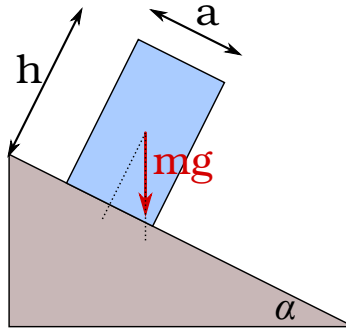
$$F_1 = mg - F_2 = mg \frac{L - 2d}{2(L - d)} . \quad (9)$$

Vizsgálva ezen egyenlet megoldását, azt látjuk, hogy amennyiben  $d > L/2$ , úgy  $F_1 < 0$  azaz a baloldali alátámasztásnál húzóerőnek kell fellépnie. Amennyiben a pallót nem csavarozzuk oda az alátámasztási ponthoz, úgy az le fog billenni az alátámasztásról.

Ezt az eredményt általánosabban is megfogalmazhatjuk: amennyiben egy sík felületre (pl. asztalra) úgy helyezünk el egy kiterjedt testet, hogy a tömegközéppontja nem nyúlik túl vízszintesen az alátámasztási pontokon, akkor egyensúlyban lehet anélkül, hogy a felülethez ragasztanánk. Amennyiben azonban a tömegközéppont túllóg az alátámasztáson, úgy le kell ragasztani/csavarozni, hiszen az alátámasztott részen valahol biztosan fel kell lépnie húzóerőnek ahhoz, hogy egyensúlyban lehessen a test.

## 2.3. Lejtőn álló hasáb

Egy  $\alpha$  hajlásszögű lejtőre egy négyzet alapú hasáb áll. Az alap oldalai  $a$  hosszúságúak, és az egyik oldal párhuzamos a lejtő irányával. Legfeljebb milyen  $h$  magasságú lehet a hasáb, hogy még ne dőljön el? Legalább mekkora kell legyen a  $\mu$  tapadási súrlódási együttható, hogy a hasáb ne csússzon meg?



Ennek a feladatnak a megoldásánál az előző feladatban látott általános eredményt használjuk, azaz megvizsgáljuk, hogy a tömegközéppont vízszintes irányban túlnyúlik-e az alátámasztáson. Ez a feltétel az alábbi egyenlőtlenséget szolgáltatja:

$$\frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha < \frac{a}{2}, \quad (10)$$

amiből annak a feltétele, hogy a hasáb nem dől el,

$$h < \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (11)$$

Meg kell még vizsgálnunk a hasáb esetleges megcsúszását. Ehhez meghatározzuk a hasábra ható nyomó- és tapadási súrlódási erőket. A hasábra ható eredő erő lejtőre merőleges komponensének eltűnése az alábbi egyenletet szolgáltatja,

$$T = mg \cos(\alpha). \quad (12)$$

A lejtővel párhuzamos komponens eltűnése miatt

$$S = mg \sin(\alpha). \quad (13)$$

A tapadás feltétele pedig

$$\mu_t > S/T = \operatorname{tg}(\alpha). \quad (14)$$

Érdekes kérdés lehet, ha van egy állítható  $\alpha$  hajlásszögű lejtőnk amire rátesszük a  $h$  magasságú hasábot, majd lassan elkezdjük növelni  $\alpha$ -t, akkor a hasáb lecsúszik a lejtőről, vagy eldől? A megcsúszás annál az  $\alpha_{cs}$  szögnél következik be, ahol  $\operatorname{tg} \alpha_{cs} = \mu_t$  teljesül. A feldőlés pedig annál az  $\alpha_d$  szögnél, ahol  $\operatorname{tg} \alpha_d = \frac{a}{h}$ .

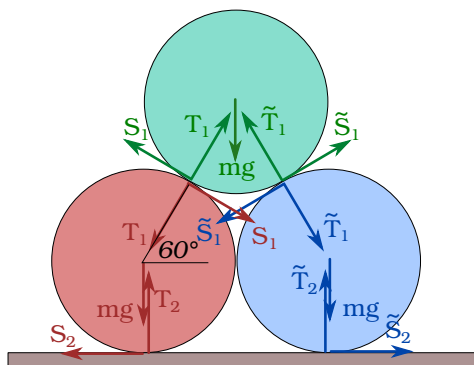
Ha  $\alpha_{cs} < \alpha_d$  úgy a hasáb előbb megcsúszik „mielőtt felborulhatna”. Tehát amennyiben  $\mu_t < \frac{a}{h}$ , úgy lassan növelve a lejtő hajlásszögét a hasáb egy idő után le fog csúszni a lejtőről. Fordított esetben a hasáb eldől mielőtt megcsúszna.

## 2.4. Három rönkből álló farakás egyensúlya

Három egyforma, henger alakú farönkből az ábrán is látható farakást építjük. A két alsó rönk között maradt egy kicsiny hézag, így ott se nyomó, se súrlódási erők nem lépnek fel. A rönkök közötti tapadási együttható  $\mu_1$ , a vízszintes talaj és az alsó rönkök közötti tapadási súrlódási együttható pedig  $\mu_2$ . A kérdés az, legalább mekkorák kell legyenek a súrlódási együtthatók, hogy a rakás ne guruljon szét?

A megoldáshoz először rajzoljuk be az egyes rönkökre ható erőket! Mivel a rönkök egyformák, és az alsó rönkök közötti hézag kicsiny, így a merőlegesen elvágvva a három rönk

középpontja egy szabályos háromszöget rajzol ki, azaz az ábrán jelölt  $\alpha$  szög  $60^\circ$ -os. Vigyáznunk kell, hogy a rönkök közötti tartó- és súrlódási erők ellenerő-párjait is be kell rajzolni az ábrába. A kavarodás elkerülése végett a három rönköt három különböző színnel mutatjuk, az egyes rönkökre ható erők pedig szintén a megfelelő színekkel vannak jelölve.



Az ilyen „megcsúszik vagy nem?” típusú feladatok megoldását általában úgy kezdjük, hogy feltesszük az egyik eshetőséget. Esetünkben tegyük fel, hogy a rakás nem csúszik szét. Ha végül ez a feltételezés olyan tapadási erők megjelenését követelné meg, amik nagyobbak a tapadási erő maximumánál, úgy a feltételezésünk téves volt, tehát a rakás megcsúszik.

A felső rönk egyensúlya három egyenletet szolgáltat nekünk:

- A rönkre ható eredő erő függőleges komponense zérus,

$$T_1 \sin(60^\circ) + \tilde{T}_1 \sin(60^\circ) + S_1 \cos(60^\circ) + \tilde{S}_1 \cos(60^\circ) = mg . \quad (15)$$

- A rönkre ható eredő erő vízszintes komponense is zérus,

$$T_1 \cos(60^\circ) - \tilde{T}_1 \cos(60^\circ) - S_1 \sin(60^\circ) + \tilde{S}_1 \sin(60^\circ) = 0 . \quad (16)$$

- A rönkre ható eredő forgatónyomaték zérus. Ezt a rönk tömegközéppontján átmenő tengelyre érdemes felírni:

$$\tilde{S}_1 R - S_1 R = 0 . \quad (17)$$

A harmadik egyenletből azonnal látjuk, hogy  $\tilde{S}_1 = S_1$ , ezt behelyettesítve a másodikba azt is látjuk, hogy  $\tilde{T}_1 = T_1$ . Így a felső rönk egyensúlya az alábbi egyetlen egyenletté egyszerűsödik:

$$2T_1 \sin(60^\circ) + 2S_1 \cos(60^\circ) = mg . \quad (18)$$

Ebből azonnal azt nyerjük, hogy

$$S_1 = mg - T_1 \sqrt{3} . \quad (19)$$

A folytatásnál érdemes észrevenni, hogy a két alsó rönk most már, tudva, hogy  $\tilde{T}_1 = T_1$  és  $\tilde{S}_1 = S_1$ , teljesen szimmetrikus a feladat szempontjából, egymással ekvivalens egyenleteket kell rájuk felírni. Tekintsük a bal oldali rönköt:

- Az eredő erő függőlegesen zérus,

$$T_2 - T_1 \sin(60^\circ) - S_1 \cos(60^\circ) = T_2 - \frac{T_1 \sqrt{3}}{2} - \frac{mg - T_1 \sqrt{3}}{2} = mg . \quad (20)$$

- Az eredő erő vízszintesen is zérus,

$$S_2 + T_1 \cos(60^\circ) - S_1 \sin(60^\circ) = S_2 + \frac{T_1}{2} - \frac{mg\sqrt{3} - 3T_1}{2} = 0. \quad (21)$$

- Az eredő forgatónyomaték zérus,

$$-S_2 R - S_1 R = 0. \quad (22)$$

A legelső egyenletből  $S_2 = -S_1 = -mg + T_1\sqrt{3}$ , a felsőből  $T_2 = \frac{3}{2}mg$ , ezeket a középsőbe helyettesítve, az egyenletrendszer megoldásai:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{mg}{2}, \\ S_1 &= mg \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ T_2 &= \frac{3mg}{2}, \\ S_2 &= -mg \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

A rakás nem csúszik meg, ha

$$\begin{aligned} \mu_1 &> \frac{|S_1|}{T_1} = 2 - \sqrt{3} = 0,268, \\ \mu_2 &> \frac{|S_2|}{T_2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{3} = 0,089. \end{aligned} \quad (24)$$

### 3. Statikailag túlhatározott rendszerek

Az eddig látott feladatok mind olyanok voltak, hogy a vizsgált testek egyensúlya egyértelműen meghatározta az ismeretlen tartó és súrlódási erőket. Az ilyen elrendezéseket statikailag meghatározottnak nevezzük. Könnyen ki tudunk azonban találni olyan elrendezéseket, ahol ez már nincs így.

#### 3.1. Falhoz támasztott létra egyensúlya

Tekintsünk egy  $m$  tömegű  $L$  hosszúságú létrát, amit a falhoz támasztottunk úgy, hogy a létra a vízszinteshez képest  $\alpha$  szögben dől. Adjuk meg a létra alsó és felső végénél ható tartó és tapadási erőket!

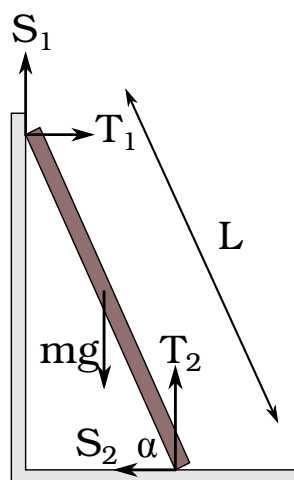
Az egyensúlyi egyenletek a következők:

- A létrára ható vízszintes eredő erő nulla, ebből

$$T_1 - S_2 = 0. \quad (25)$$

- A létrára ható függőleges eredő erő is nulla, ebből

$$T_2 + S_1 - mg = 0. \quad (26)$$



- A létrára ható eredő forgatónyomaték nulla. Írjuk fel ezt az alsó érintkezési ponton átmenő tengelyre!

$$mg \frac{L}{2} \cos(\alpha) - S_1 L \cos(\alpha) - T_1 L \sin(\alpha) = 0 . \quad (27)$$

Az első és második egyenletekből kifejezve  $S_2$ -t és  $S_1$ -et, majd utóbbit behelyettesítve a harmadik egyenletbe mindenkit ki tudunk fejezni pl.  $T_1$  ismeretében,  $T_1$ -et magát azonban már nem tudjuk meghatározni,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{mg}{2} - T_1 \operatorname{tg} \alpha , \\ T_2 &= \frac{mg}{2} + T_1 \operatorname{tg} \alpha , \\ S_2 &= T_1 . \end{aligned} \quad (28)$$

Amit kaptunk nem meglepő: négy ismeretlen erőnk volt, de csak három független egyensúlyi egyenletünk. Fizikailag is érthető az erők meghatározatlansága: ha pl. felülről elkezdenénk kalapálni a létrát lefelé, úgy be tudnánk feszíteni a fal és a talaj közé: bár a létra továbbra is egyensúlyban lenne, de a végeken fellépő erők a befeszüléstől függően megváltoznának.

Ahhoz, hogy meg tudjuk ténylegesen határozni a végeken fellépő erőket, tudnunk kell a létrában ébredő belső feszültségeket, amik a létra torzulásaival is kapcsolatba hozhatók. Ez mutatja számunkra a merev-test modell korlátait: az ilyen (ún. statikailag túlhatározott) elrendezéseknél az erők meghatározásához figyelembe kell vennünk a testek deformációját is. Ez a probléma azonban túlmutat a mostani előadás anyagán.

### 3.2. Háromtámaszú tartó

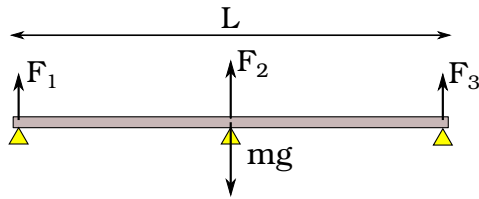
Tekintsük a kéttámaszú tartó általánosításaként a háromtámaszú tartót, azaz egy  $L$  hosszúságú pallót amit a két végén és a közepén is alátámasztottunk. A palló tömege  $m$ . Szeretnénk meghatározni az alátámasztásoknál fellépő függőleges erőket. Az erők egyensúlya az alábbi egyenletet jelenti,

$$F_1 + F_2 + F_3 - mg = 0 . \quad (29)$$

A forgatónyomatékok egyensúlyát bármely tengelyre felírhatjuk, de most érdemes a palló közepén átmenő tengelyre felírni, erre ugyanis két erő nyomatéka is zérus. A nyomatéki egyenlet:

$$F_3 \frac{L}{2} - F_1 \frac{L}{2} = 0 . \quad (30)$$

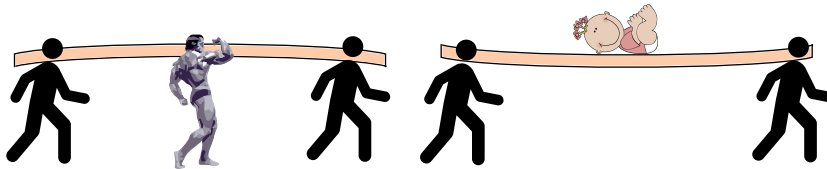




Két egyenletünk van, három ismeretlennel: a tartóerők nem meghatározottak. Az egyensúlyi egyenletek miatt azért a következő összefüggéseket fel tudjuk írni,

$$F_1 = F_3 = \frac{mg - F_2}{2} . \quad (31)$$

Láthatóan a középső pillértől függően a két szélő tartó terhelése erősen függ. Az alábbi ábrával ezt a függést szemléletesen is tehetjük. Tegyük fel, hogy hárman cipelnek egy gerendát. Ha a középső ember erős, úgy akár az is megtörténhet, hogy a gerenda teljes súlyát ő viszi. A másik extrém esetet mutatja a jobboldali ábra, ahol a középső ember nemhogy segítene, hanem plusz teherként cipelteti magát a két társával.



A háromtámaszú tartó példáján szemléletesen tehető a túlhatározottsági probléma forrása. Ahhoz, hogy kiegyensúlyozunk egy gerendát elméletileg elegendő kettő alátámasztás is. Feltehetjük a kérdést: mégis miért van szükség akkor több alátámasztásra? A választ józan ésszel is látjuk: nincs ideális, végtelenül erős gerenda. Ha nagy távolságot szeretnénk áthidalni, úgy feltétlenül szükséges lehet több alátámasztás, enélkül a szerkezet akár már saját súlya alatt összeroskad.



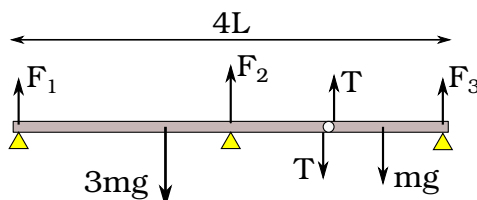
*A képeken a Kőröshegyi völgyhíd és a budapesti Szabadság híd láthatjuk. Előbbi esetén alátámasztások sora, utóbbi esetén is négy alátámasztási pont látható.*

Mérnöki szempontból nagyon fontos megszüntetni a szerkezetek túlhatározottságát. Amint a háromtámaszú tartó példáján láttuk, az egyes tartópilléreknél fellépő erők nem meghatározottak:

meghatározásukhoz a szerkezet torzulását is figyelembe kell venni. Ez egyrészt az eddigiekhez képest bonyolultabb matematikai eszköztárat igényel: ún. differenciálegyenleteket kell megoldani. Ennél is nagyobb probléma azonban, hogy a pilléreknél fellépő erők kicsiny, néhány milliméteres/centiméteres torzulásoktól is erősen függenek. Egy híd építésénél még a mai technikával is nehezen valósítható meg a pillérek ilyen pontosságú építése, nem is beszélve a használatba vétel utáni esetleges süllyedésekről/elmozdulásokról. Arra a trükkre, amit a folytatásban megvizsgálunk csak az ipari forradalom idején jöttek rá a mérnökök. Ezért nem véletlen, hogy a XIX. század előtt épült hidak sokkal zömökebbek a maiaknál: annak idején muszáj volt biztosra menni a méretezésnél.

### 3.3. Háromtámaszú tartó, csuklóval

Az előzőekben felvázolt túlhatározottsági probléma egy lehetséges megoldása a következő: törjük el a gerendát valahol és építsünk be egy könnyen elforduló csuklót. Az ábrán láthatóan a háromtámaszú híd hosszát jelöljük  $4L$ -lel, össztömegét  $4m$ -mel. A híd legyen alátámasztva a két szélén és a közepén. A közepétől jobbra  $L$  távolságra építettük be a könnyen elforduló csuklót. A csuklónál felléphet a híd darabjaira ható erő/ellenerő pár, de az egyes darabok között forgatónyomaték nem léphet fel.



A csuklótól jobbra eső darabra felírt egyensúlyi egyenletek az alábbiak:

- Az erők egyensúlya,

$$T + F_3 - mg = 0 . \quad (32)$$

- A forgatónyomatékok egyensúlya, pl. a csuklóra felírva:

$$F_3 L - mg \frac{L}{2} = 0 . \quad (33)$$

Innen azonnal adódik a  $T = F_3 = \frac{mg}{2}$  megoldás.

A csuklótól balra eső részre felírt egyenleteknél már használhatjuk a  $T$ -re nyert eredményt:

- Az erők egyensúlya:

$$F_1 + F_2 - 3mg - \frac{mg}{2} = 0 . \quad (34)$$

- A forgatónyomatékok egyensúlya (pl. a bal szélre felírva):

$$-3mg \frac{3L}{2} + F_2 2L - \frac{mg}{2} 3L = 0 . \quad (35)$$

A második egyenletből kifejezve  $F_2$ -t majd az elsőből  $F_1$ -et végül megkapjuk a pilléreknél fellépő

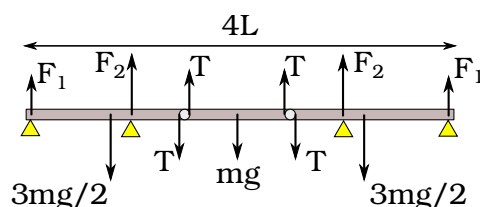
tartóerőket ill. a csuklónál ébredő  $T$  erőt:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{mg}{2}, \\ F_2 &= 3mg, \\ F_3 &= \frac{mg}{2}, \\ T &= F_3 = \frac{mg}{2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Láthatjuk, hogy a csukló beépítése statikailag határozottá tette a feladatot. Végiggondolhatjuk azt is, ha valamelyik pillért (nem túl nagy mértékben) magasabbra vagy mélyebbre helyezük, a pillérek terhelése nem változik.

### 3.4. Gerber tartó, Szabadság-híd

A Szabadság híd ún. Gerber tartós szerkezetű. Ennek lényege, hogy a két pillér közötti részen két csuklót is beépítettek, ezzel téve statikailag határozottá a rendszert. Tekintsük a híd sematikus modelljét, jelölje a híd hosszát  $4L$ , össztömegét  $4m$ . Az alátámasztások legyenek a híd szélein, ill. tőlük  $L$  távolságra. A két csuklót szimmetrikusan helyeztük el úgy, hogy a középső „lógó” híddarab  $L$  hosszúságú. A feladat megoldását lényegesen leegyszerűsíthetjük,



ha kihasználjuk az elrendezés szimmetriáját. Így elegendő pl. a bal szélső hídelemmel és a középső elemmel foglalkoznunk csupán. A középső elem egyensúlyából következik, hogy

$$T = \frac{mg}{2}. \quad (37)$$

A bal szélső hídelemre felírva az erők egyensúlyát,

$$F_1 + F_2 - \frac{3}{2}mg - \frac{mg}{2} = 0. \quad (38)$$

A bal szélső elemre felírva a forgatónyomaték egyensúlyát (pl. a híd szélére),

$$F_2L - \frac{3mg}{2} \frac{3L}{4} - \frac{mg}{2} \frac{3L}{2} = 0. \quad (39)$$

Megoldva a két egyenletet,

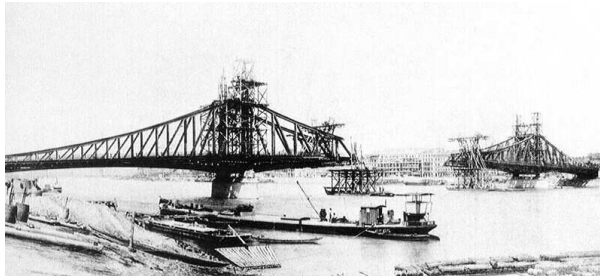
$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{15}{8} mg, \\ F_1 &= \frac{1}{8} mg. \end{aligned} \quad (40)$$

Most vizsgáljuk meg a Szabadság híd esetén a híd tényleges szerkezetét. Áthajtva a hídon a két pilon között két ponton egy-egy érdekes, óriási csavart láthatunk. Ha tüzetesebben



megnézzük a híd szerkezetét láthatjuk, hogy itt az acélrudak nincsenek mereven rögzítve, hanem mint csúszólemezek elcsúszhatnak egymáson. Ez az óriási csavar játssza el a csukló szerepét.

Érdekes megnézni a híd építése idején készült fényképeket is. Láthatóan először a két szélső hídelemet építették meg, a középső befüggesztett részt később emelték a helyére és rögzítették az óriás csavarokkal.



### 3.5. Magas farakás

Tekintsük a korábban látott három rönkös farakás  $h$  szintből álló általánosítását. A kérdés az, hogy mekkora  $h$ -nál válik statikailag túlhatározottá a rendszer? A rönkök össz száma:

$$N_r = \sum_{i=1}^h h_i = \frac{h(h+1)}{2}. \quad (41)$$

Az érintkezési pontok  $E$  száma legalul  $h$ , minden felsőbb szinten a szinten lévő rönkök számának kétszerese.

$$E = h + \sum_{i=1}^{h-1} 2i = h + h(h-1) = h^2. \quad (42)$$

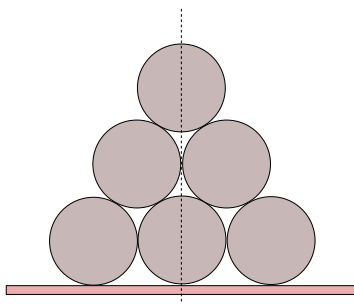
Érintkezési pontonként két ismeretlen erőnk van: egy nyomóerő és egy súrlódási erő. Azaz összesen  $2E = 2h^2$  ismeretlen erőnk van. Az egyensúlyi feltételek rönkönként három egyenletet szolgáltatnak, azaz  $3N_r = \frac{3h(h+1)}{2}$  egyenletünk van. A rendszer statikailag túlhatározott, ha nincs elég egyenletünk az ismeretlen erők meghatározására. Ez a következő feltételt jelenti:

$$2h^2 > \frac{3h(h+1)}{2}. \quad (43)$$

Ebből adódik, hogy  $h > 3$  esetén biztosan túlhatározott a rendszer.

Láttuk, hogy  $h = 2$ -re meg tudtuk oldani az egyenleteket. A  $h = 3$  eset érdekes abból a szempontból, hogy bár elvileg volna elegendő egyenletünk, de kiderül, hogy ezek nem mind

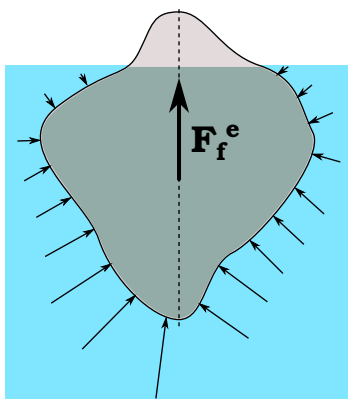
függetlenek. Ez belátható közvetlenül is, de az igen fáradságos feladat. Beláthatjuk azonban a következő gondolatmenettel is.



Láthatóan az elrendezés szimmetrikus, ezért feltéve, hogy jól meghatározott megoldása van az egyenleteknek, az biztosan szimmetrikus lesz, azaz az erők és a tükörképeik egymással egyenlő nagyságúak. Használjuk ki a szimmetriát, foglalkozzunk csak a rakás bal oldalával! A felső és legalul középen lévő rönkökre a szimmetria kihasználása után már csak az erők függőleges egyensúlyát tudjuk független egyenletként felírni, ami 1-1 egyenlet. A két bal szélső rönkökre továbbra is 3-3 egyenletet tudunk felírni, azaz maradt összesen 8 független egyenletünk. A rakás bal oldalához összesen 5 érintkezési pont tartozik, ezek közül a legalsón annyit állíthatunk, hogy a súrlódási erő a szimmetria miatt zérus (nem mutathat sem balra, sem jobbra.) A többi érintkezési ponton mind súrlódási, mind nyomóerő felléphet. Azaz marad végül 9 ismeretlen erőnk 8 egyenletre, a rendszer tehát túlhatározott, már  $h = 3$ -ra is.

#### 4. Vízbe mártott testek, a felhajtóerő

Vízbe mártott testekre hat az ún. felhajtóerő, aminek nagyságát Archimédész törvénye alapján tudjuk kiszámítani: a test által kiszorított víz súlyának megfelelő erő hat rá függőlegesen felfelé. Ahhoz azonban, hogy kiterjedt testek egyensúlyát tudjuk vizsgálni olyan esetekben, amikor azok részben (vagy egészen) vízbe vannak mártva, nem elég tudnunk a felhajtóerő nagyságát, hanem azt is meg kell tudnunk mondani, hogy az eredő felhajtóerő hatásvonalát hol találhatjuk.



A felhajtóerő azért lép fel, mert a test felületén a nyomás következtében kifejtett erők eredője nem nulla. Az eredő erő hatásvonalának kiszámításához fel kellene összegezni a felületen lévő elemi erők forgatónyomatékait is, így megkapva a felhajtóerő forgatónyomatékát. Ez a számítás

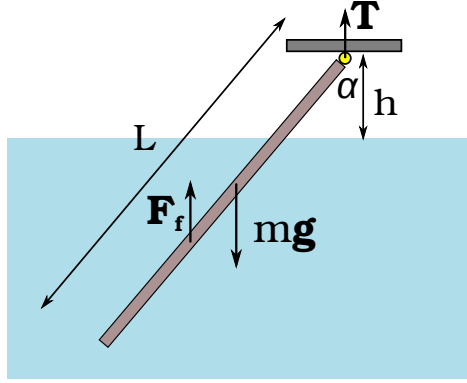
túlmutat ezen előadás keretein, hozzá a vektoranalízis ismerete szükséges. Kis gondolkodással azonban mégis megtalálhatjuk a helyes választ.

Tegyük fel ugyanis, hogy a test által kiszorított víztérfogatot képzeletben visszacseréljük vízre. Ez a víztérfogat ekkor biztosan egyensúlyban lesz, tehát rá az eredő erő és az eredő forgatónyomaték is nulla. Erre a víztérfogatra is hat felhajtóerő, ami épp a víztérfogat súlyával tart egyensúlyt: ebből nem más mint Archimédész törvénye következik. A vízre ható eredő forgatónyomaték is zérus: ez csak úgy lehetséges, ha a víztérfogatra ható eredő gravitációs erő és felhajtóerő hatásvonala egybeesik, hiszen ekkor forgatónyomaték szempontjából is kioltják egymást. Azt azonban tudjuk, hogy a gravitációs erőt a víztérfogat tömegközéppontjába helyezhetjük, így az egyensúlyból következik, hogy a felhajtóerőt is oda helyezhetjük.

Azt kaptuk tehát némi okoskodással, hogy a felhajtóerő forgatónyomaték szempontjából a kiszorított víztérfogat „képzeletbeli” tömegközéppontjába helyezhető.

#### 4.1. Vízbe nyomott pálca, stabilitás

Egy  $\rho$  sűrűségű, keskeny  $A$  keresztmetszetű  $L$  hosszúságú palcát az ábrán látható módon  $\rho_v$  sűrűségű vízbe lógatunk. A pálca felső felfüggesztési pontja  $h$  magassággal van a vízfelszín felett. Határozzuk meg a pálca függőlegessel bezárt  $\alpha$  szögét!



Írjuk fel először a csuklón átmenő tengelyre vonatkoztatott forgatónyomatékok egyensúlyát! A rúd össztömege  $m = \rho AL$ , ezért

$$\rho ALg \frac{L}{2} \sin(\alpha) - F_f k_f = 0, \quad (44)$$

ahol  $F_f$  a felhajtóerő és  $k_f$  ennek erőkarja. Előbbit a vízbe lógó rész  $L - \frac{h}{\cos(\alpha)}$  hosszával könnyen meghatározhatjuk,

$$F_f = \rho_v Ag \left( L - \frac{h}{\cos(\alpha)} \right). \quad (45)$$

Az eredő felhajtóerő a vízbe lógó rész közepénél hat, azaz

$$k_f = \left( \frac{h}{\cos(\alpha)} + \frac{L - \frac{h}{\cos(\alpha)}}{2} \right) \sin(\alpha) = \left( \frac{L}{2} + \frac{h}{2 \cos(\alpha)} \right) \sin(\alpha). \quad (46)$$

Ezzel a forgatónyomatékok egyensúlya:

$$\rho ALg \frac{L}{2} \sin(\alpha) = \rho_v Ag \left( L - \frac{h}{\cos(\alpha)} \right) \left( \frac{L}{2} + \frac{h}{2 \cos(\alpha)} \right) \sin(\alpha). \quad (47)$$

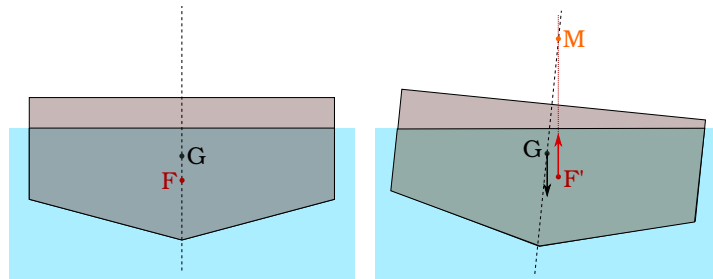
Ennek nyilvánvalóan megoldása az  $\alpha = 0$ , azaz amikor a pálca nem billen ki. A másik megoldás

$$\cos(\alpha) = \frac{h}{L} \sqrt{\frac{\rho_v}{\rho_v - \rho}}. \quad (48)$$

Ez a második megoldás csak akkor értelmes, ha  $1 \geq \frac{h}{L} \sqrt{\frac{\rho_v}{\rho_v - \rho}}$ , ekkor azonban ez a stabil megoldás, az  $\alpha = 0$  instabillá válik.

## 4.2. Úszás stabilitása

Ha egy hajót tervezünk, akkor azon túl, hogy elvárjuk tőle, hogy ússzon a vízfelszínen, azt is szeretnénk ha az úszás stabil lenne, külső zavaró tényezők ellenére a hajó nem borulna fel. A kérdés az, hogy ismerve a hajó keresztmetszeti profilját, mi alapján tudjuk eldönteni, hogy az úszás stabil-e.



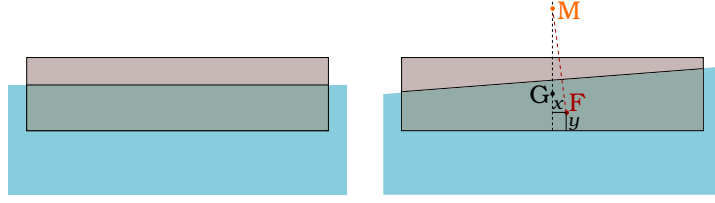
Amikor egy egyensúlyi helyzet stabilitását vizsgáljuk, akkor úgy érdemes gondolkodni, hogy megkérdezzük: mi történik ha az egyensúlyból kicsit kitértem a testet? Ha a testre ható erők/forgatónyomatékok a testet az egyensúly felé igyekeznek visszatéríteni, úgy az egyensúly stabil, ellenkező esetben labilis.

Egy úszó hajó esetén a hajóra hat a nehézségi erő és a felhajtó erő. Előbbi a test tényleges tömegközéppontjában, utóbbi a kiszorított víztérfogat képzeletbeli tömegközéppontjában támad, és mindkét erő függőleges irányú. Érdemes az egyensúlyi helyzetben felvenni a hajó tényleges G-vel jelölt tömegközéppontján átmenő függőleges egyenest. Ezt nevezzük el úszási tengelynek, és képzeletben ragasszuk hozzá a hajóhoz, azaz eldöntve a hajót ez dőljön vele együtt. Az egyensúlyi helyzetben a felhajtóerő F támadásponja is az úszási tengelyen helyezkedik el, azonban kibillentve a hajót a felhajtóerő új F' támadásponja már eltér az úszási tengelytől. Húzzunk ezen az F'-n keresztül egy függőleges egyenest (ez a felhajtóerő hatásvonala). Ez az úszási tengellyel az M pontban metszi egymást, ezt a szakirodalom „metacentrum”-nak nevezi. Írjuk fel erre a metacentrumra a forgatónyomatékokat. A felhajtóerő erőkarja zérus. A gravitációs erő forgatónyomatékának iránya pedig attól függ, hogy az úszási tengelyen az M pont a G fölött vagy alatt helyezkedik-e el. Előbbi esetben az úszás stabil utóbbi esetben instabil: a hajó felborul.

## 4.3. Úszó deszka, stabilitás

Egy igen hosszú  $h$  vastagságú,  $a$  szélességű deszka úszik a vízen. A kérdés az, hogy hogyan teszi ezt, azaz melyik oldala vízszintes, melyik oldala függőleges? A deszka sűrűsége  $\rho$ , a vízé  $\rho_v$ .

A megoldásnál először tételezzük fel, hogy úszáskor az  $a$  oldal vízszintes és a  $h$  függőleges. A deszka bemerülése egyensúlyban  $\tilde{h} = h \frac{\rho}{\rho_v}$ . Billentsük ki a deszkát egy kicsiny  $\alpha$  szöggel! Ezt most az ábrán úgy mutatjuk, hogy a vízfelszínt elforgattuk  $\alpha$  szöggel.



A feladatunk először meghatározni a kiszorított víztérfogat tömegközéppontjának  $x$  és  $y$  koordinátáját. A víztérfogat keresztmetszete egy derékszögű trapéz, aminek párhuzamos alapjai  $\tilde{h} - \frac{a}{2}\text{tg}(\alpha)$  és  $\tilde{h} + \frac{a}{2}\text{tg}(\alpha)$ . A tömegközéppont helyzetét érdemes úgy meghatározni, hogy a trapézt felvágjuk egy  $a$  és  $\tilde{h} - \frac{a}{2}\text{tg}(\alpha)$  oldalú téglalpra és egy  $a$  ill.  $a\text{tg}(\alpha)$  oldalú derékszögű háromszögre. A téglalap tömegközéppontja az  $x_t = 0$  és  $y_t = \frac{\tilde{h} - \frac{a}{2}\text{tg}(\alpha)}{2}$  helyen található, a háromszögé pedig a súlypontjában, azaz  $x_{hsz} = \frac{a}{6}$  és  $y_{hsz} = \tilde{h} - \frac{a}{2}\text{tg}(\alpha) + \frac{a}{3}\text{tg}(\alpha)$ . A vízbe mártott rész tömegközéppontjának koordinátái:

$$x = \frac{x_t A_t + x_{hsz} A_{hsz}}{A_{tot}} = \frac{\frac{a}{6} \frac{a^2 \text{tg}(\alpha)}{2}}{\tilde{h} a} = \frac{a^2 \text{tg}(\alpha)}{12\tilde{h}}, \quad (49)$$

$$y = \frac{y_t A_t + y_{hsz} A_{hsz}}{A_{tot}} = \frac{\frac{\tilde{h} - \frac{a}{2}\text{tg}(\alpha)}{2} a \left(\tilde{h} - \frac{a}{2}\text{tg}(\alpha)\right) + \left(\tilde{h} - \frac{a\text{tg}(\alpha)}{6}\right) \frac{a^2 \text{tg}(\alpha)}{2}}{\tilde{h} a} = \frac{\tilde{h}}{2} + \frac{a^2 \text{tg}^2(\alpha)}{24\tilde{h}}. \quad (50)$$

Most közelítést fogunk végezni. Ha csak kis szögben térítettük ki a hajót, úgy  $\alpha$  kicsi, és ezért  $\text{tg}(\alpha)$  is kicsi, azaz  $\text{tg}(\alpha) \ll 1$ . Ekkor a  $\text{tg}^2(\alpha)$  már nagyon kicsi, ezért a második egyenletben a második tag elhanyagolható. Ezzel a közelítéssel

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2 \text{tg}(\alpha)}{12\tilde{h}}, \\ y &= \frac{\tilde{h}}{2}. \end{aligned} \quad (51)$$

Határozzuk meg az M pont  $y_M$  koordinátáját!

$$y_M = y + \frac{x}{\text{tg}(\alpha)} = \frac{\tilde{h}}{2} + \frac{a^2}{12\tilde{h}}. \quad (52)$$

Az úszás stabilis, ha az M pont a deszka tömegközéppontja felett van, azaz

$$\frac{\tilde{h}}{2} + \frac{a^2}{12\tilde{h}} > \frac{h}{2} q. \quad (53)$$

Tudjuk, hogy  $\tilde{h} = \frac{\rho}{\rho_v} h$ , innen a stabilitás feltétele

$$\frac{\rho}{\rho_v} h + \frac{\rho_v}{\rho} \frac{a^2}{6h} > h. \quad (54)$$

Innen átrendezés után

$$\frac{a}{h} > \sqrt{6 \left( \frac{\rho}{\rho_v} - \frac{\rho^2}{\rho_v^2} \right)} \equiv \Gamma. \quad (55)$$



Eredetileg feltettük, hogy az  $a$  oldal vízszintes úszáskor. A számolásunk nem változik, ha azt tételezzük fel, hogy a  $h$  oldal vízszintes, ekkor a stabilitási feltételünk

$$\frac{h}{a} > \Gamma . \quad (56)$$

A  $\Gamma$  hasában álló kifejezést teljes négyzetté alakítva láthatjuk, hogy  $\Gamma_{\max} = \sqrt{\frac{3}{2}}$  és ezt akkor veszi fel, amikor a deszka sűrűsége fele a vízének. Az  $\frac{a}{h}$  és  $\Gamma$  függvényében érdekes lehet megnézni azokat a tartományokat ahol egyik vagy másik oldalán stabilan úszhat a deszka. Elegendő az  $\frac{a}{h} > 1$  tartományt vizsgálni, hiszen az  $\frac{a}{h} < 1$  elérhető a két hosszúság felcserélésével. Az ábrán



megjelenik egy nagy zöld tartomány. Ezen a tartományon a deszka mind a széles mind a keskeny oldalán stabilan úszhat. A sárga tartományon viszont csak a széles oldalán úszhat stabilan a keskenyen nem. Érdekes módon megjelenik a piros tartomány is, ahol egyik lapján sem úszhat stabilan.

A feladat során az egyszerűség kedvéért eltekintettünk attól a ténytől hogy a deszkának hosszúsága is van, ezért a megoldásunk nem teljes, hiszen hosszirányban is kibillenhetne a deszka, de az összes lehetséges elfordulás figyelembevétele lényegesen elbonyolítja a számításainkat. Elegendően hosszú deszka esetén azonban a deszka hosszirányban biztosan felfekszik a vízre, ekkor jó a modellünk.