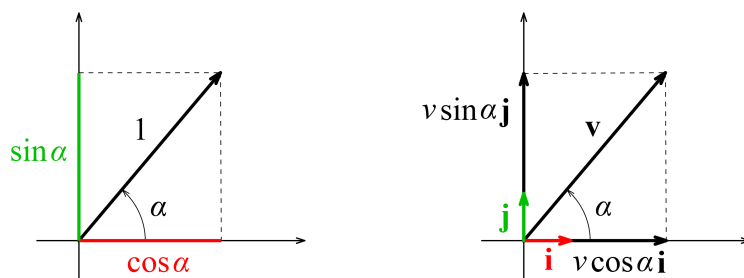


## Fazorok

2015. március 27.

A *fazorok* fázist ábrázoló vektorok. Használatukkal a fizika legkülönbözőbb területein (mechanikai rezgések és hullámok, váltóáramú hálózatok, optika) tudunk egyszerűen megoldani feladatokat.

A vektorok és a rezgések *fázisa* közötti kapcsolat megértéséhez először idézzük fel a  $\sin\alpha$  és  $\cos\alpha$  szögfüggvények definícióját egységvektor segítségével!



A bal oldali ábrán egy, az  $x$ -tengellyel  $\alpha$  forgásszöget bezáró egységvektort látunk. (A *forgásszög* egy irányított szög, ami  $360^\circ$ -nál nagyobb, vagy negatív is lehet, az *egységvektor* egy egységnyi hosszúságú vektor.) A vektor koordinátái definíció szerint  $\cos\alpha$  és  $\sin\alpha$ .

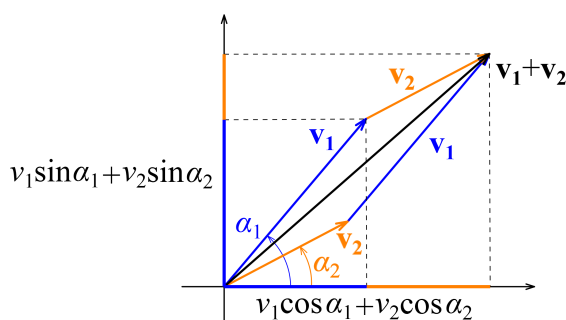
A definíció alapján egy tetszőleges  $\mathbf{v}$  vektort is fel tudunk bontani  $x$ - és  $y$ -irányú komponensekre. Ehhez vegyünk fel az  $x$ - és  $y$ -tengely irányába mutató  $\mathbf{i}$  és  $\mathbf{j}$  egységvektorokat, ahogy az a jobb oldali ábrán látszik.

A  $\mathbf{v}$  vektor felbontása az ábra alapján:

$$\mathbf{v} = v \cos\alpha \mathbf{i} + v \sin\alpha \mathbf{j}.$$

Jegyezzük meg, hogy  $v$  a vektor nagysága vagy abszolút értéke,  $v \cos\alpha$  és  $v \sin\alpha$  pedig a vektor koordinátái – ezek mind skalár mennyiségek, a  $v \cos\alpha \mathbf{i}$  és  $v \sin\alpha \mathbf{j}$  vektorkomponensek viszont a  $\mathbf{v}$  vektorhoz hasonlóan szintén vektorok.

Ha vektorokat akarunk összeadni, azt megtehetjük grafikusán, például a következő ábrán látható módon a paralelogramma-módszerrel.



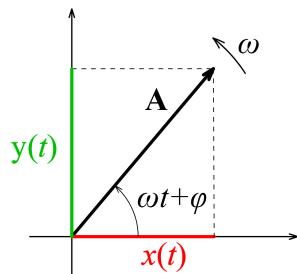
Ugyanakkor az ábráról az is leolvasható, hogy az eredő vektor koordinátái az összeadandó vektorok koordinátáinak összegével egyeznek meg, azaz a vektorokat komponensenként adhatjuk össze:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 &= v_1 \cos\alpha_1 \mathbf{i} + v_1 \sin\alpha_1 \mathbf{j} + v_2 \cos\alpha_2 \mathbf{i} + v_2 \sin\alpha_2 \mathbf{j} = \\ &= (v_1 \cos\alpha_1 + v_2 \cos\alpha_2) \mathbf{i} + (v_1 \sin\alpha_1 + v_2 \sin\alpha_2) \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Ha egy  $\mathbf{A}$  vektor  $\omega$  szögsebességgel forog az origó körül, akkor a  $\alpha$  forgásszög időben változó nagyságú lesz:

$$\alpha(t) = \omega t + \varphi,$$

ahol  $\varphi$  az  $\alpha$  szög értéke a  $t = 0$  időpillanatban.



Ekkor a forgó vektor koordinátái szintén időben változó mennyiségek lesznek:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) \\ y(t) &= A \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

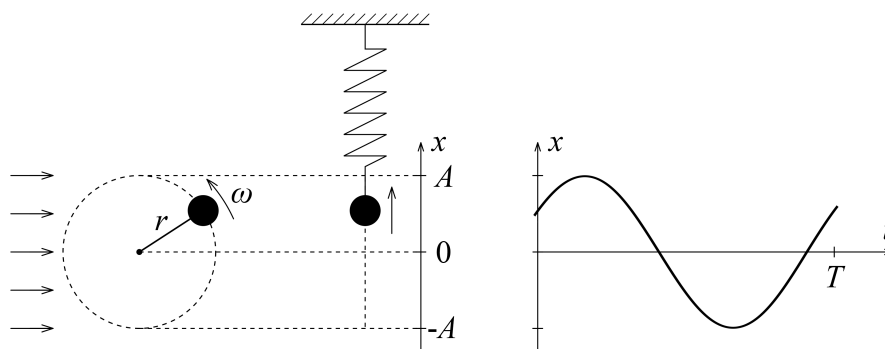
Vegyük észre, hogy a koordinátákat megadó időfüggvények *harmonikus rezgések*!  $x(t)$  és  $y(t)$  kifejezésében  $A$  a rezgés *amplitúdója*,  $\omega$  pedig a rezgés *körfrekvenciája*, ami a rezgés  $f$  frekvenciájával és  $T$  periódusidejével a következő kapcsolatban van:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

A zárójelben lévő időben változó mennyiség a rezgés fázisa,  $\varphi$  pedig az úgynevezett *kezdőfázis* (a fázis nagysága a  $t = 0$  pillanatban).

### 1. Kísérlet: körmozgás és rezgés

Ha egy egyenletes körmozgást a körmozgás síkjából nézünk (vagy párhuzamos fénynyalábbal megvilágítjuk, és az árnyékát nézzük), akkor egy harmonikus rezgőmozgást látunk – ugyanolyan, mint egy megfelelően méretezett rugóra akasztott test mozgása.



A rezgés amplitúdója a körpálya sugarával, körfrekvenciája a körmozgás szögsebességével egyezik meg.

Ezt az analógiát használjuk fel: rezgéseket forgó vektorok segítségével vizsgálunk.

## 2. Azonos frekvenciájú rezgések összeadása

Egy rendszer mozgását gyakran több rezgés összegeként (szuperpozíciójaként) írhatjuk le. Legyen először a két rezgés azonos frekvenciájú:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . A rezgések kitérését leíró időfüggvények:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\x_2(t) &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) .\end{aligned}$$

Határozzuk meg a két rezgés összegét algebrai úton! Keressük a megoldást

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

alakban. Bontsuk fel mindhárom időfüggvényt addíciós tételek segítségével, és írjuk fel az  $x_1(t) + x_2(t) = x(t)$  egyenletet:

$$\begin{aligned}A_1 (\cos \omega t \cos \varphi_1 - \sin \omega t \sin \varphi_1) + A_2 (\cos \omega t \cos \varphi_2 - \sin \omega t \sin \varphi_2) = \\= A (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) .\end{aligned}$$

Ez az egyenlet csak akkor teljesülhet *minden*  $t$  időpillanatban, ha a  $\cos \omega t$ -s és  $\sin \omega t$ -s tagokra külön-külön is teljesül, ebből (a második egyenletben  $-1$ -gyel egyszerűsítve):

$$\begin{aligned}A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 &= A \cos \varphi \\A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 &= A \sin \varphi .\end{aligned}$$

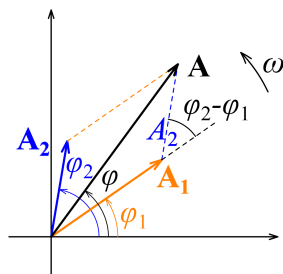
Ez egy kétismeretlenes egyenletrendszer  $A$ -ra és  $\varphi$ -re.  $\varphi$  tangense a két egyenlet hányadosából azonnal adódik:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} ,$$

$A$ -t pedig úgy lehet megkapni legegyszerűbben, ha mindkét egyenletet négyzetre emeljük, és összeadjuk (ennek végigszámolását az olvasóra bízjuk), amiből

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} .$$

Keressük most meg az eredő rezgés amplitúdóját fazorok segítségével!



A két vektor azonos szögsebességgel forog, így relatív helyzetük nem változik. Gondolatban akár bele is ülhetünk a vektorokkal együtt forgó koordináta-rendszerbe. Az eredő

vektort a szokásos módon megszerkeszthetjük, az ábráról pedig – egy koszinusz-tétel felírásával (felhasználva, hogy  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ ) azonnal adódik:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) .$$

Ugye, sokkal egyszerűbb? Ezen kívül szemléletesebb is: jól látszik, hogy  $A$  akkor lesz maximális, ha a két vektor egy irányba mutat, azaz a két rezgés fázisa megegyezik, és akkor lesz minimális, ha a vektorok ellentétes irányúak, azaz a fázisok között  $\pi$  fáziskülönbség van. Az eredő amplitúdó lehetséges értéke:

$$|A_1 - A_2| \leq A \leq A_1 + A_2 .$$

### 3. Különböző frekvenciájú rezgések összeadása, lebegés

Legyen most a két frekvencia különböző ( $\omega_1 \neq \omega_2$ ), viszont az egyszerűség kedvéért az amplitúdók azonosak ( $A_1 = A_2 = A$ ). Ekkor a két rezgés közötti fáziskülönbség folyamatosan változik, így az időmérés kezdetének választhatunk egy olyan pillanatot, amikor a két fázis megegyezik. Az időfüggvények:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \cos \omega_1 t \\ x_2(t) &= A \cos \omega_2 t . \end{aligned}$$

A két rezgés összege:

$$x(t) = A (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t .$$

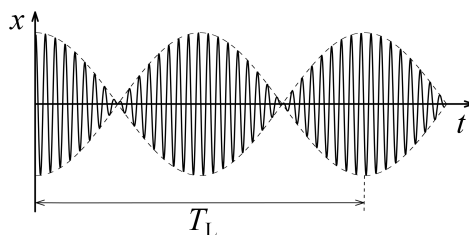
Ha a két frekvencia közti különbség kicsi, azaz

$$\begin{aligned} |\omega_1 - \omega_2| &\ll \omega_1 + \omega_2 \\ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} &= \omega \approx \omega_1 \approx \omega_2 \\ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} &= \omega_L \ll \omega \end{aligned}$$

akkor az eredő mozgás időfüggvénye

$$x(t) = 2A \cos \omega_L t \cdot \cos \omega t$$

alakba írható. Az első koszinuszos tényező sokkal lassabban változik, mint a második, így a mozgás felfogható egy olyan  $\omega$  körfrekvenciájú rezgésnek, melynek amplitúdója  $\omega_L$  körfrekvenciával (lassan) változik 0 és  $2A$  között. Ez a *lebegés* jelensége ( $T_L = 2\pi/\omega_L$ ).



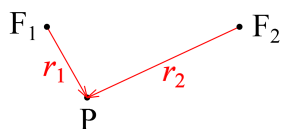
**4. Kísérlet: lebegés** A lebegés jelenségét használják a zenészek a hangszerek összehangolásához: két, kicsit eltérő hangmagasság egyszerre megszólaltatva „lebegő”, periodikusan változó hangerősséget eredményez, míg ha a két hang frekvenciája (magassága) megegyezik, a lebegés megszűnik.

A kísérletben két egyforma hangvilla közül az egyiket egy kis „lovass” (az egyik hangvillaszárra szerelt apró súly) segítségével elhangolunk, majd a két hangvillát egyszerre megszólaltatjuk. Jól hallható a lebegés (pedig a két hangvilla külön-külön megszólaltatva az átlagos fülű embernek teljesen egyformának hallatszik).

## 5. Mechanikai hullámok interferenciája

A hullámterjedés a természet egyik legáltalánosabb mozgásformája. A mechanikai hullámok közül a víz felületi hullámjai közvetlenül is megfigyelhetők. Mindenki látott már egy pontszerű hullámforrás (például egy vízbe eső tárgy) körül kialakult koncentrikus hullámokat.

A következő feladatban két pontszerű hullámforrás által együttesen létrehozott hullámképet fogunk vizsgálni. A hullámok nagyon fontos tulajdonsága, hogy a hullámok szuperpozíciójakor egymást erősíteni és gyengíteni (esetleg kioltani) is képesek. Ez az interferencia jelensége.



Vizsgáljuk az eredő kitérést a P pontban! Tegyük fel, hogy a két hullámforrás azonos  $\omega$  körfrekvenciával és azonos fázisban indít hullámokat. A P pontba azonban ezek a hullámok valamekkora késéssel fognak megérkezni. A késés mértéke a hullám  $c$  terjedési sebességétől és a P pont forrásoktól mért távolságától függ. Az egyes források által keltett kitérés a P pontban eszerint:

$$x_1(P) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r_1}{c} \right) \right] = A \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{c} r_1 \right)$$

$$x_2(P) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r_2}{c} \right) \right] = A \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{c} r_2 \right),$$

hiszen a  $c$  sebességgel terjedő hullámok  $r$  távolságot  $r/c$  idő alatt tesznek meg, ennyivel később érkeznek meg a P pontba.

Az  $x(P) = x_1(P) + x_2(P)$  eredő kitérés amplitúdó a 2. feladatban kapott eredmény alapján:

$$A(P) = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2 \cos \left[ \frac{\omega}{c} (r_1 - r_2) \right]}.$$

Mikor lesz az eredő amplitúdó maximális? Ha

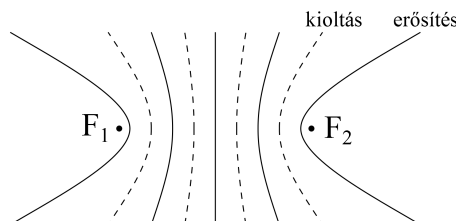
$$\cos \left[ \frac{\omega}{c} (r_1 - r_2) \right] = 1$$

$$\frac{\omega}{c} (r_1 - r_2) = 2n\pi, \quad n \in Z$$

$$r_1 - r_2 = n \frac{2\pi}{\omega} c = n \frac{c}{f} = n c T = n \lambda.$$

Tehát azokban a pontokban lesz maximális erősítés, amelyekben a két forrástól mért távolság különbsége a hullám  $\lambda$  hullámhosszának egész számú többszöröse. Ezekben a pontokban az eredő amplitúdó a források amplitúdójának kétszerese, a hullám intenzitása („erőssége”) pedig az egyes intenzitások négyszerese. (Gondolatmenetünkben felhasználtuk, hogy  $\lambda = cT$ , hiszen a  $c$  sebességgel haladó hullám a  $T$  periódusidő alatt éppen egy hullámhossznyi utat tesz meg, valamint hogy az intenzitás az amplitúdó négyzetével arányos.)

Hol helyezkednek el ezek a pontok? Olyan hiperbola íveken, melyek fókuszai a források.



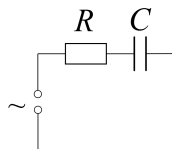
Az erősítési helyekhez hasonlóan megtalálhatjuk a kioltási helyeket is:

$$\begin{aligned} \cos \left[ \frac{\omega}{c} (r_1 - r_2) \right] &= -1 \\ \frac{\omega}{c} (r_1 - r_2) &= (2n + 1)\pi, \quad n \in Z \\ r_1 - r_2 &= (2n + 1) \frac{\pi}{\omega} c = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Tehát azokban a pontokban, amelyekben a két forrástól mért távolság különbsége a fél hullámhossz páratlan számú többszöröse. Ezekben a pontokban az eredő amplitúdó nulla. (A hullámok terjedés közbeni gyengülését mindvégig elhanyagoltuk.) Ezek a pontok is hiperbolaíveken helyezkednek el.

## 6. Váltóáramú hálózatok: soros RC-kör

Vizsgáljunk egy soros RC-kört: egy ohmos ellenállást és egy kondenzátort sorba kötve szinuszosan változó feszültségre kötünk.



Az ohmos ellenálláson a feszültség és az áramerősség hányadosa mindig ugyanakkora, ezért

$$U_R(t) = RI(t)$$

minden időpillanatban teljesül, a két időfüggvény fázisa megegyezik.

A kondenzátornál bonyolultabb a helyzet (akik nem tanultak deriválni, d helyére írjanak  $\Delta$ -t):

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}.$$

Ha a kondenzátor feszültségét  $U_C(t) = \hat{U}_C \sin \omega t$  alakban írjuk fel ( $\hat{U}_C$  a feszültség csúcsértéke), akkor az áramerősség időfüggvénye (deriválással – vagy aki még nem tanult deriválni, az fogadja el az eredményt):

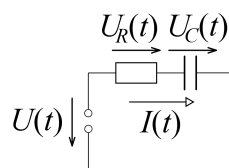
$$I(t) = IC\omega \cos \omega t = \hat{I} \cos \omega t,$$

ahol  $\hat{I} = C\omega\hat{U}_C$  az áramerősség csúcsértéke.

Eszerint a kondenzátor (kapacitív) ellenállása

$$X_C = \frac{\hat{U}_C}{\hat{I}} = \frac{1}{C\omega},$$

és az áramerősség  $I(t)$  függvénye  $90^\circ$ -kal siet a kondenzátoron eső feszültség  $U_C(t)$  függvényéhez képest.

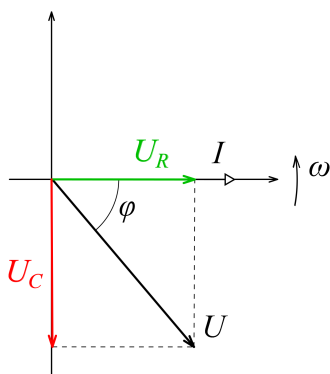


A soros kapcsolás miatt – ahogy az ábrán látszik – minden pillanatban teljesül az

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t)$$

Kirchhoff-törvény. (De ez csak az időfüggvényekre igaz! A csúcsértékekre és az effektív értékekre nem!)

Ábrázoljuk az áram-idő és feszültség-idő függvényeknek megfelelő fázorokat!



A gyakorlatban használt effektív értékek mindenhol a csúcsértékek  $\sqrt{2}$ -ed részei, így megtehetjük, hogy mindent ennyivel kicsinyítve rajzolunk fel, és így a rajzon csúcsértékek helyett az effektív értékek látszanak. Minden fázor  $\omega$  szögsebességgel forog, így a forgó koordináta-rendszerbe „beülve” állóképet látunk.

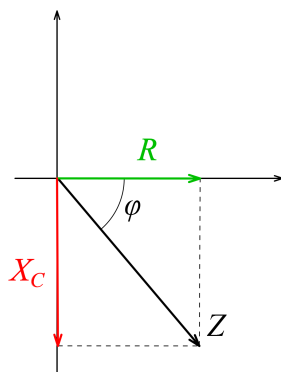
Vegyük fel az áram fázorát vízszintesen. Az ohmos ellenállás fazora vele fázisban lesz, a kapacitív ellenállásé pedig  $90^\circ$ -kal késik hozzá képest. Az  $U(t)$  feszültség fázorát a két feszültséget ábrázoló fázor eredőjeként kapjuk meg. Az ábráról leolvasható, hogy

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} I.$$

Ha az összes effektív feszültséget ábrázoló fazon hosszát elosztjuk az áramerősség effektív értékével, akkor ellenállásokat kapunk. Az eredő feszültség és az áram hányadosa az áramkör eredő ellenállása:

$$Z = \frac{U}{I}$$

A következő ábrán már az ellenállások vektorábrája látható.



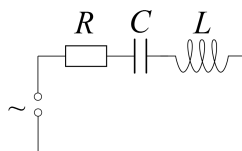
Erről közvetlenül leolvasható a soros RC-kör jól ismert  $Z$  eredő ellenállása, valamint meghatározható az eredő feszültség áramerősséghez viszonyított  $\varphi$  fázisa (késése):

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}.$$

## 7. Váltóáramú hálózatok: soros RLC-kör

Ehhez teljesen hasonlóan írható le a soros RLC-kör is.



A tekercs viselkedését az indukció-törvény alapján írhatjuk fel:

$$U_L = L \frac{dI(t)}{dt}.$$

Ha  $I(t) = \hat{I} \cos \omega t$  most is, akkor a tekercsen eső feszültség (ismét deriválással)

$$U_L(t) = -L\omega \hat{I} \sin \omega t = -\hat{U}_L \sin \omega t,$$

azaz most az áram késik  $90^\circ$ -kal a tekercs feszültségéhez képest.

Itt is bevezetjük a tekercs (induktív) ellenállását:

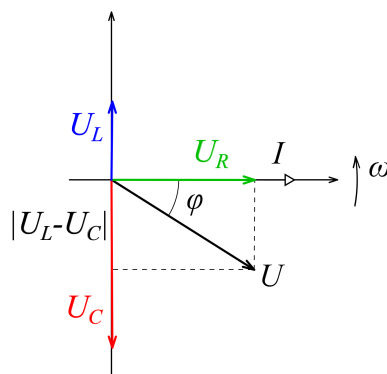
$$X_L = \frac{\hat{U}_L}{\hat{I}} = L\omega.$$



A Kirchhoff-törvény miatt az időfüggvényekre (de megint csak azokra!) teljesül:

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) + U_L(t).$$

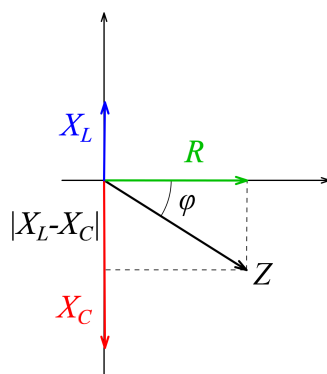
Ábrázoljuk az előző feladathoz hasonlóan az áramerősséget és a feszültségeket fazorokkal.



A tekercs feszültsége siet  $90^\circ$ -kal az áramerősséghez képest. Az eredő feszültség fazorja ismét a három feszültséget ábrázoló fazor eredője. Az ábráról leolvasható, hogy

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} I.$$

Készítsük el ismét az ellenállásokat ábrázoló vektorábrát is.



Erről közvetlenül leolvasható az eredő ellenállás és a fázisszög:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}.$$

A képletből kiolvasható, hogy az eredő ellenállásnak minimuma van, ha

$$L\omega = \frac{1}{C\omega},$$

azaz

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Ez a rezonancia esete.

A feszültség attól függően siet vagy késik az áramerősséghez képest, hogy az induktív vagy a kapacitív ellenállás nagyobb-e. Rezonancia esetén az áram és a feszültség azonos fázisú.

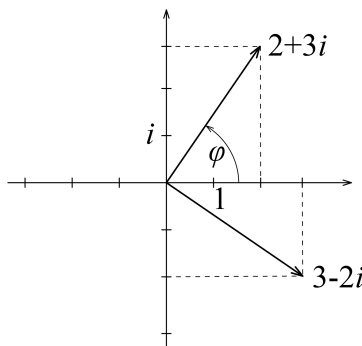
## 8. Komplex számok

A valós számok körében nincs megoldása az  $x^2 = -1$  egyenletnek. A számkör bővítésével azonban ez az egyenlet is megoldható. Az  $i$  képzetes egységet éppen az  $i^2 = -1$  összefüggéssel vezetjük be (bár az egyenlet nem definiálja egyértelműen  $i$ -t, hiszen  $(-i)^2$  is  $-1$ ).

A  $z = ai + b$  alakú számokat (ahol  $a$  és  $b$  valós) komplex számoknak nevezzük. A komplex számokkal a valós számokhoz hasonlóan lehet műveleteket végezni. A részletes ismertetés helyett álljon itt néhány példa:

$$\begin{aligned}(1 + i) + (3 - 2i) &= 4 - i \\(1 + i)(3 - 2i) &= 3 - 2i + 3i - 2i^2 = 5 + i \\ \frac{1 + i}{3 - 2i} &= \frac{(1 + i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{1 + 5i}{13} = \frac{1}{13} + \frac{5}{13}i.\end{aligned}$$

A komplex számokat ábrázolhatjuk egy kétdimenziós koordináta-rendszerben, ahol a vízszintes tengelyen szokás a szám valós részét, a függőlegesen a képzetes részét ábrázolni. Ez alapján láthatjuk, hogy a komplex számok és a sík vektorai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adhatunk meg.



A komplex számot így jellemezhetjük a hozzá tartozó vektor hosszával és a vektor valós tengellyel bezárt szögével is. Előbbit a komplex szám abszolút értékének nevezzük. Az abszolút érték és a  $\varphi$  szög  $a$  és  $b$  segítségével kifejezhető:

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \varphi &= \frac{a}{|z|}.\end{aligned}$$

Ez alapján a komplex számot így is felírhatjuk:

$$z = |z| \cos \varphi + |z| \sin \varphi i$$

Vegyük észre, hogy egy valós számmal való szorzás a komplex szám hosszát változtatja meg, az  $i$ -vel való szorzás viszont  $+90^\circ$ -kal elforgatja (lásd az ábrán)!

$$(3 - 2i)i = 2 + 3i.$$

### 9. Komplex ellenállások, bonyolultabb váltóáramú hálózatok számolása

Kapcsoljuk össze az eddigieket! A váltóáramú ellenállásokat vektorokkal ábrázoltuk, a vektoroknak viszont komplex számokat feleltettünk meg: ennek alapján bevezetjük a komplex ellenállásokat. Ezeket – hogy megkülönböztessük a valós értékektől – \*-gal fogjuk jelölni.

Az ohmos ellenálláson a feszültség és az áram fázisban van, így az ohmos ellenállás komplex ellenállása is valós:

$$R^* = R.$$

Az induktív ellenálláson a feszültség  $90^\circ$ -kal siet az áramhoz képest, így a komplex ellenállásnak az áram fázorát  $+90^\circ$ -kal kell elforgatnia. Ez alapján

$$X_L^* = L\omega i.$$

A kapacitív ellenállásnál viszont késik a feszültség az áramhoz képest, itt  $-90^\circ$ -os forgatásra van szükség, ami  $i$ -vel való osztással ( $-i$ -vel való szorzással) valósítható meg:

$$X_C^* = \frac{1}{C\omega i}.$$

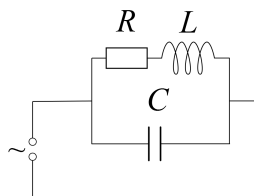
Egy hálózat eredő komplex ellenállása ezután egyszerűen ugyanúgy számolható, mint az egyenáramú hálózatoknál (csak itt komplex számokkal kell műveleteket végezni). Soros kapcsolásnál az ellenállások összeadódnak, például egy soros RC-körben a komplex ellenállás, valamint az abból meghatározott valós érték:

$$Z^* = R^* + X_C^* = R + \frac{1}{C\omega i} = R - \frac{1}{C\omega}i$$

$$Z = |Z^*| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2},$$

ugyanúgy, ahogy korábban is megkaptuk.

Ez a módszer azonban bonyolultabb, soros és párhuzamos kapcsolásokat vegyesen tartalmazó kapcsolásban is használható, ahol a fázoros számolás már nagyon bonyolult volna. A vállalkozó kedvű olvasónak javaslom házi feladatként az ábrán látható kapcsolás eredő ellenállásának meghatározását.



## 10. Euler-összefüggés: a komplex számok exponenciális alakja

Befejezésként felírjuk a nagyon meglepő és szép *Euler-összefüggést*:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x ,$$

ahol  $e \approx 2,718$ , egy sok különleges tulajdonsággal rendelkező irracionális szám.

Ezt felhasználva bevezethetjük egy szinuszosan változó feszültség komplex időfüggvényét:

$$U^*(t) = \hat{U} e^{i(\omega t + \varphi)} = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi) + i \hat{U} \sin(\omega t + \varphi) .$$

A kifejezést a hatványozás azonosságainak felhasználásával átalakítva:

$$\hat{U} e^{i(\omega t + \varphi)} = \hat{U} e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \hat{U}^* e^{i\omega t} ,$$

ahol az  $\hat{U}^* = \hat{U} e^{i\varphi}$  időtől független komplex szám a komplex feszültség, amely a feszültség nagyságát és fázisát adja meg.

Ehhez teljesen hasonlóan bevezethető a komplex áramerősség is. A komplex feszültségekkel és áramokkal, valamint a komplex ellenállásokkal ugyanúgy számolhatunk, mint ahogy azt az egyenáramokkal és az ohmos ellenállásokkal megtanultuk, tehát például felírhatjuk az Ohm-törvényt:

$$\hat{U}^* = Z^* \hat{I}^* .$$

(Ez az összefüggés nem csak a feszültség és az áramerősség nagysága közt teremt kapcsolatot, hanem a fázisviszonyokat is leírja.)

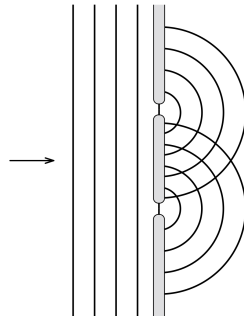
A számítások végén visszatérhetünk a valós függvényekre és értékekre, például:

$$U(t) = \operatorname{Re} [U^*(t)] = \operatorname{Re} [\hat{U}^* e^{i\omega t}]$$
$$\hat{U} = |\hat{U}^*| ,$$

ahol  $\operatorname{Re} [z]$  a  $z$  komplex mennyiség valós (reális) részét jelenti.

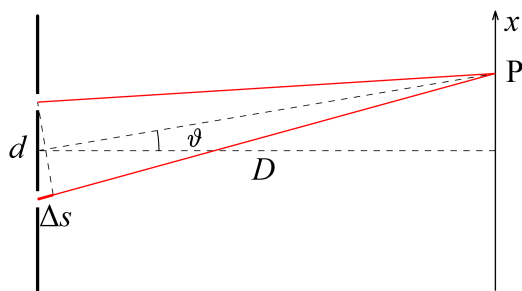
## 11. Optika: interferencia két keskeny résen

A fény elektromágneses hullám, így az optikában is megfigyelhetünk interferenciajelenségeket. Az 5. feladatban szereplő két hullámforrásos elrendezést azonban az optikában nehezebb létrehozni, mert nem tudjuk biztosítani, hogy a források azonos fázisban keltessenek hullámokat. Ehelyett egy aránylag távoli fényforrás fényével egy olyan akadályra világítunk, amin két keskeny rés található.

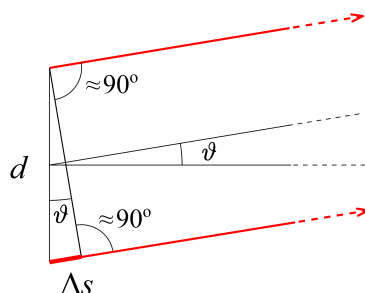


A rések mögött a fény nem csak egyenes vonalban halad tovább, hanem szétterül – ez az *elhajlás* jelensége. A rések mögött ugyanolyan hullámképet kapunk, mint ha két, azonos frekvenciájú és azonos fázisú hullámforrásunk lenne.

Az interferenciát most egy távoli (a rések távolságánál sokkal messzebb lévő) ernyőn vizsgáljuk: azt keressük, hogy hogyan változik az intenzitás az ernyőn az  $x$  távolság függvényében.



A  $\Delta s$  útkülönbség meghatározásához felhasználjuk, hogy az ernyő a rések távolságához képest nagyon messze van, a P pont felé menő fénysugarak majdnem párhuzamosak.



Az ábra alapján

$$\Delta s = d \sin \vartheta \approx d\vartheta,$$

ahol  $d$  a rések távolsága,  $\vartheta$  pedig leolvasható az ábráról. Felhasználtuk a kis (radiánban mért) szögekre igaz  $\sin \vartheta \approx \text{tg } \vartheta \approx \vartheta$  közelítést.

Maximális erősítést akkor kapunk, ha az útkülönbség a hullámhossz egész számú többszöröse:

$$d\vartheta = n\lambda,$$

amiből az erősítések  $x$  helye:

$$x = D \text{tg } \vartheta \approx D\vartheta = n \frac{\lambda D}{d}.$$

Az ernyőn tehát egymástól

$$\Delta x = \frac{\lambda D}{d}$$

távolságra fényes csíkokat fogunk látni. A  $D$  és a  $\Delta x$  távolságok könnyen lemérhetők, és ebből a rések távolságának ismeretében a fény  $\lambda$  hullámhossza, a hullámhossz ismeretében pedig a (nagyon kicsi)  $d$  réstávolság kiszámítható.

A korábbi eredményeinket felhasználva azonban nemcsak a fényes csíkok távolságát, hanem az ernyőn mérhető  $I(x)$  intenzitáseloszlást (a fény erősségét a hely függvényében) is meghatározhatjuk.

Ha a két fénysugár között  $\Delta s$  útkülönbség van, akkor a fáziskülönbségük:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta s}{\lambda},$$

(hiszen  $\lambda$  útkülönbséghez éppen  $2\pi$  fáziskülönbség tartozik).

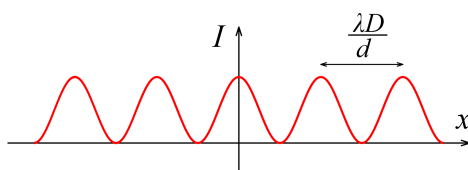
Az eredő amplitúdó a 2. feladat alapján:

$$A(P) = \sqrt{2A^2(1 + \cos \Delta\varphi)},$$

az eredő intenzitás pedig

$$I(x) = A(P)^2 = 2A^2(1 + \cos \Delta\varphi) = 2A^2 \left( 1 + \cos 2\pi \frac{\Delta s}{\lambda} \right) = 2A^2 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi d}{D\lambda} x \right) \right] = 4A^2 \cos^2 \left( \frac{\pi d}{D\lambda} x \right).$$

(Felhasználtuk, hogy  $\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$ .) Az intenzitáseloszlás az ábrán látható.



## 12. Optika: több keskeny rés, optikai rács, széles rések, ...

A fázorok segítségével – magasabb matematika nélkül – szemlélhető és kiszámítható több keskeny résből álló optikai rendszer interferencia képe is. A nagyon sok résből álló rendszer neve *optikai rács*. Megváltozik az interferenciakép (az egyes maximumok nagysága) akkor is, ha a rések szélessége összemérhető a távolságukkal. A fázorok segítségével ez is leírható, számolható.

Erről részletesen lehet olvasni (angolul) ebben a cikkben:

<http://mono.eik.bme.hu/~vanko/wfphc/CompetitionProblemSchool.pdf>

Házi feladatként javaslom a cikk elolvasását, a cikkben szereplő excel-fájl (<http://mono.eik.bme.hu/~vanko/wfphc/simulate.zip>) letöltését és az azzal való „játékot”.

Vankó Péter